目　　录

第 1 章

多复变函数的基本性质

符号　我们用 C, R, Z, N 分别表示复数域,实数域,整数环和所有非负整数的集合. $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{R}^n$ 将分别表示域 C 上和域 R 上的 n 维向量空间,且分别用 $(z_1, \cdots, z_n)$, $z_j \in \mathbf{C}$ 和 $(x_1, \cdots, x_n)$, $x_j \in \mathbf{R}$ 表示它们的点. 我们看待 $\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 时, 都认为已赋于它们自然拓扑.

对 $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, 令 $\|z\| = \sqrt{(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)}$,

$$|z| = \max_{j=1,\cdots,n} |z_j|,$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 内的点亦用类似的符号.

一般用 α, β,$\cdots$表示 N 的元素组成的 n-元组; 即 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbf{N}$. 令

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

$\alpha \leqslant \beta$ 表示 $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $j = 1, \cdots, n$ 和 $\alpha < \beta$ 表示 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$.

如果 $a \in \mathbf{C}^n$ 和 $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n)$, 则以 a 为中心,以 ρ 为(多元)半径的多圆柱是指集合.

$$P(a, \rho) = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_1 - a_1| < \rho_1, \cdots, |z_n - a_n| < \rho_n\}.$$

$\bar{P}(a, \rho)$ 表示 $P(a, \rho)$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的闭包. 最后,如果 $z \in \mathbf{C}^n$,$\alpha \in \mathbf{N}^n$, 令

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

有时要将 C 等同于 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{C}^n$ 等同于 $\mathbf{R}^{2n}$, 则表示

$$z = x + iy, \quad z_j = x_j + iy_j, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad x_j, y_j \in \mathbf{R},$$

$$i = \sqrt{-1}, j = 1, \cdots, n.$$

对于开集 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上的一个连续可微分复值函数 g,令

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}-i\frac{\partial g}{\partial y_j}\right),\ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}+i\frac{\partial g}{\partial y_j}\right),$$

$$(D^\alpha g)(z)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}g(z).$$

如果 A，B 是一个(Hausdorff)拓扑空间 X 的两个子集，$A\Subset B$ 表示 A 是在 B 内相对紧致的. 通常 $\mathring{A}$ 表示 A 的内点所成之集，$\overline{A}$ 是 A 的闭包，$\partial A=\overline{A}-\mathring{A}$ 表示 A 的边界.

一个开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的无穷次可微分函数所成的类，记之为 $C^\infty(\Omega)$. 我们也称 $C^\infty(\Omega)$ 的每个元素是 C^∞ 函数.

全纯函数

定义1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集，f 是 Ω 上的一个复值函数,则称 f 是在 Ω 上全纯的. 如果对 $\forall a\in\Omega$ 都有一个邻域 U 和一个幂级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha(z-a)^\alpha=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geqslant 0}c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n},$$

对 $\forall z\in U$，则此级数收敛于 $f(z)$. 今后我们用 $\mathscr{H}(\Omega)$ 表示 Ω 上的全纯函数的集合.

引理1 (Abel) 假设 $\{c_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{N}^n}$ 是一个复数集，且对 $\rho_1,\cdots,\rho_n>0$ 存在 $M>0$ 使得

$$|c_\alpha|\rho_1^{\alpha_1}\cdots\rho_n^{\alpha_n}\leqslant M\qquad\forall\ \alpha\in\mathbf{N}^n,$$

则级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha(z-a)^\alpha$$

对 $|z_j-a_j|\leqslant\theta\rho_j$，$0\leqslant\theta<1$ 是一致收敛的. 而且,导数级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha D^\beta(z-a)^\alpha,\quad\beta\in\mathbf{N}^n,$$

亦对 $|z_j-a_j|\leqslant\theta\rho_j$ 是一致收敛的.

系 全纯函数都是无穷可微的. 而且,当 $f(z)=\sum c_\alpha(z-a)^\alpha$ 时,有 $c_\alpha=\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a)$.

引理 2 如果 f 在 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上全纯，有 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0,\ j=1,\cdots,n.$

这个引理的逆也成立，将在第 3 章证明此事实.

命题 1（解析开拓原理） 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 是一个连通开集，f 是在 Ω 上全纯. 如果 f 在 Ω 的一个非空开集上恒为零，则 $f\equiv 0$ 在 Ω 上成立.

证 设 $E=\{z\in\Omega \mid D^\alpha f(z)=0,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{N}^n\}$. 如果令 $E_\alpha=\{z\in\Omega \mid D^\alpha f(z)=0\}$，因为 $D^\alpha f$ 是连续的，故 E_α 是一个闭集，所以 $E=\bigcap E_\alpha$ 是闭的.

设 $a\in E$，则有一个 a 的开邻域 U 和一个幂级数 $\sum c_\alpha(z-a)^\alpha$，对 $\forall z\in U$ 它收敛于 $f(z)$. 由引理 1 的系与 $a\in E$，故 $c_\alpha=\dfrac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)=0$. 因此对 $\forall z\in U$，有 $f(z)=0$. 所以对 $z\in U$ 和 $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$，有 $D^\alpha f(z)=0$. 于是 $U\subset E$，这就得出 E 是开集.

由于 Ω 是连通的，$E\neq\phi$，故 $E=\Omega$.

注 如果存在某个 $a\in\Omega$，$D^\alpha f(a)=0$ 对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 成立，则 $f\equiv 0$.

定义 2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 内之开集和 f 是一个 Ω 上的（实值或复值）函数，我们称 f 是实解析的. 如果对每个 $a\in\Omega$ 对应有一个 a 的邻域 U 和一个幂级数 $\sum c_\alpha(x-a)^\alpha$，则对 $\forall x\in U$，它收敛于 $f(x)$.

注 (1) 如前所述，实解析函数是 c^∞ 的.

(2) 解析开拓原理对实解析函数亦成立：证明是同样的.

下面的二个命题是单复变数函数的 Cauchy 公式的直接结果.

Cauchy 公式与某些推论

命题 2（Cauchy 公式） 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 内的一个开集，f 是 Ω 上的一个全纯函数，$a\in\Omega$ 和 $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$，$\rho_j>0$ 是使得 $\bar{P}(a,\rho)\subset\Omega$，则对 $z\in P(a,\rho)$，有

$$f(z)=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\cdot\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

系 1 在上面的假设下，

$$D^{\alpha}f(z)=\alpha!(2\pi i)^{n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

这里用符号 $\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}$ 代表 $\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}$，
这在后面将常用到。

系 2 如果 f 是在多圆柱 $P(a,\rho)$ 内的一个全纯函数，则级数

$$\sum\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)(z-a)^{\alpha}$$

对 $z\in P(a,\rho)$，收敛到 $f(z)$。

注意 如果 φ 在集合 $|\zeta_j-a_j|=\rho_j, j=1,\cdots,n$ 上是连续函数，

$$f(z)=\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}\varphi(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

是在 $P(a,\rho)$ 内全纯且等于

$$\sum c_{\alpha}(z-a)^{\alpha}.$$

这里

$$c_{\alpha}=\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}\varphi(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

这个等式由下面的公式直接得之

$$\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(z_j-a_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}};$$

这个级数对 z 在 $P(a,\rho)$ 的一个紧致集上与 $|\zeta_j-a_j|=\rho_j$ 时，是一致收敛的。

命题 3（Cauchy 不等式） 如果 f 是在 Ω 上的全纯函数和 $\bar{P}(a,\rho)\subset\Omega$，则有

$$|D^{\alpha}f(a)|\leqslant M\alpha!\rho^{-\alpha}.$$

这里 $M=\sup_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}|f(\zeta)|$。

如果写 $\zeta_j-a_j=\rho_j e^{i\theta_j}$，则由命题 2 立刻推得此命题。

开映照定理

命题 4（开映照定理） 设Ω是$\mathbf{C}^n$中之一连通开集并且f是在Ω上的一全纯函数. 假设f不是常数，则$f:\Omega\to\mathbf{C}$是开的;亦即f将Ω中之开集映为$\mathbf{C}$中之开集.

证. (a) $n=1$时可以假设$0\in\Omega$与$f(0)=0$. 只要证明$f(\Omega)$是0的邻域就够了. 设$\rho>0$这样选取,使得$\{z\in\mathbf{C}\mid|z|\leqslant\rho\}\subset\Omega$且对$|z|=\rho$，有$f(z)\neq 0$. 设$\delta=\inf\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$，则$\delta>0$. 设$W\in\mathbf{C}$，$W\bar{\in}f(\Omega)$和$|W|<\delta$，则

$$\varphi(z)=(f(z)-W)^{-1}$$

是在Ω上全纯. 由命题3

$$\frac{1}{|W|}=|\varphi(0)|\leqslant\sup_{|z|=\rho}|\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{\delta-|W|},$$

所以$|W|\geqslant\frac{1}{2}\delta$. 因此$\left\{W\in\mathbf{C}\mid|W|<\frac{1}{2}\delta\right\}\subset f(\Omega)$.

(b) **一般情况** 设$a\in\Omega$和U是a的一个凸邻域,且$U\subset\Omega$,由命题1, $f|U\not\equiv f(a)$. 设$b\in U$, $f(b)\neq f(a)$, 考虑

$$D=\{z\in\mathbf{C}\mid a+z(b-a)\in U\}.$$

设$g(z)=f(a+z(b-a))$，$z\in D$，则D是一个包含0, 1的凸集,并且$g(0)=f(a)\neq f(b)=g(1)$. 因此，由(a)推出，$g(D)$是$f(a)$的一个邻域. 从$F(U)\supset g(D)$推出命题

系 1（极大模原理） 设Ω是$\mathbf{C}^n$内有界连通开集，且f是Ω上的全纯函数,令$M=\sup\limits_{\zeta\in\partial\Omega}\overline{\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\Omega}}|f(\zeta)|$，如果$f$不是常数,则有$|f(z)|<M\ \forall z\in\Omega$.

证 可以假设$M<\infty$. 在$\bar{\Omega}$上定义函数φ为

$$\varphi(z)=|f(z)|,\quad z\in\Omega,\quad \varphi(\zeta)=\overline{\lim_{z\to\zeta,z\in\Omega}}|f(z)|.$$

$\varphi(z)$在紧致集$\bar{\Omega}$上是上半连续，因此是在$\bar{\Omega}$上有界. 所以由命题4 $f(\Omega)=U$是一个有界开集（假定f不是常数）. 进一步，因为f是开的，$\forall W\in\partial U$具有$W=\lim f(z_\nu)$，这里$\{z_\nu\}$是收敛于$\partial\Omega$的某点的Ω内的点列. 因此$\partial U\subset\{W\in\mathbf{C}\mid|W|\leqslant M\}$. 由

于U是有界而且开的，故$U\subset\{W\in\mathbf{C}\,|\,|W|<M\}$. 证毕.

系 2 如果f在$\mathbf{C}^n$内的连通开集Ω上全纯并有$a\in\Omega$使$|f(z)|\leqslant|f(a)|$对$\forall z\in\Omega$成立，则f是一个常数.

证 如果f不是常数，$f(\Omega)$将是包含在$\{W\in\mathbf{C}\,|\,|W|\leqslant|f(a)|\}$中之开集，因此将包含在$\{W\in\mathbf{C}\,|\,|W|<|f(a)|\}$中，这是荒谬的.

Weierstrass 定理和 Montel 定理

命题 5 （Weierstrass 定理） 设Ω是$\mathbf{C}^n$内一个开集，设$\{f_\nu\}$是Ω上的全纯函数列，它们在Ω的每个紧致子集上是一致收敛的，则$f=\lim f_\nu$是在Ω上全纯，对$\alpha\in\mathbf{N}^n$，$\{D^\alpha f_\nu\}$在Ω的每个紧子集上收敛于$D^\alpha f$.

证 设$a\in\Omega$, $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$使$\bar{P}(a,\rho)\subset\Omega$并且设

$$|z_j-a_j|<\frac{1}{2}\rho_j,$$

则

$$\begin{aligned}f(z)&=\lim f_\nu(z)\\&=\lim(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f_\nu(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-1}\alpha\zeta_1\cdots d\zeta_n\\&=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.\end{aligned}$$

由命题 2 的系 2，f是在a的邻域内全纯. 而且当

$$|z_j-a_j|\leqslant\frac{1}{2}\rho_j$$

时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)&=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n\\&=\lim(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f_\nu(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n\\&=\lim\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f_\nu|z).\end{aligned}$$

命题 6 （montel 定理） 设$\mathscr{F}=\{f\}$是Ω上的一个全纯函数族，且对任一紧致集$K\subset\Omega$，存在$M=M_K>0$，使

$$|f(z)| < M \qquad 对 \forall z \in K, \forall f \in \mathscr{F},$$

则任一序列 $\{f_\nu\}$, $f_\nu \in \mathscr{F}$ 包含有一个子序列，它们在 Ω 的紧致子集上一致收敛.

证 对 $a \in \Omega$ 和 $f \in \mathscr{F}$，设 $\sum c_\alpha(f, a)(z-a)^\alpha = f(z)$ 在 a 的一个邻域内成立. 由命题 2 的系 2，这个级数在一个与 f 无关的多圆柱 $P(a, \rho)$ 内收敛. 进一步，由命题 3 和对 $\mathscr{F}$ 的假设，有 $c>0$ 使得

$$|c_\alpha(f, a)| \leqslant c r^{-\alpha}.$$

$r=(r_1, \cdots, r_n)$ 适合 $0<r_j<\rho_j$. 因此，如果 $\{f_\nu\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的元素所成的序列，我们能用对角线方法，找到一个子序列 $\{f_{\nu_k}\}$，使当 $k\to\infty$ 时，对 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $c_\alpha(f_{\nu_k}, a)$ 收敛. 这就得到 $\{f_{\nu_k}\}$ 在 a 的一个邻域中一致收敛. 事实上，设 $U=P(a, r')$，使 $0<r'_j<r_j<\rho_j$，则对 $\forall z \in U$，

$$|f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_l}(z)| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant N} |c_\alpha(f_{\nu_k} - f_{\nu_l}, a)| + 2C \sum_{|\alpha|>N} r'^{\alpha} r^{-\alpha}.$$

从 $r'_j < r_j$，当 $N\to\infty$ 时，上式右边最后一项 $\to 0$（关于 k, l 一致的）. 进一步对每个 α，当 $k, l\to\infty$ 时，有 $c_\alpha(f_{\nu_k} - f_{\nu_l}, a) \to 0$. 这样得到

$$\sup_{z\in U} |f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_l}(z)| \to 0 \quad 当 k, l \to \infty.$$

如果 $\{U_p\}_{p=1,2,\cdots}$ 是覆盖 Ω 的开集序列，$\mathscr{F}$ 的元素所组成的任一序列，对每个 p 都有一个子序列在 U_p 上一致收敛. 因此对任一序列 $\{f_\nu\}$, $f_\nu \in \mathscr{F}$，再用对角线法，可找出一个子序列在每个 U_p 上都是一致收敛的. 这个序列显然在 Ω 的每个紧致子集上一致收敛.

定义 3 一个在连通开集 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 中的子集 A 称为是一个唯一性集，如果任何 Ω 上的全纯函数 f 在 A 上为 0，则 $f\equiv 0$ 在 Ω 上成立.

例 集合 A 如果有 $\mathring{A} \neq \phi$，则是唯一性集.

命题 7 (Vitali) 设 $\{f_\nu\}$ 是在连通开集 Ω 上的全纯函数序列和 A 是 Ω 内的唯一性集. 假设 $\{f_\nu\}$ 是在 Ω 上一致有界（$|f_\nu(z)| < M$ 对所有 $z \in \Omega$，所有 ν 成立），且对 $\forall a \in A$ 有 $\{f_\nu(a)\}$ 收敛，则

$\{f_\nu\}$是在Ω的紧致子集上一致收敛的.

证 如果 $\{f_\nu\}$ 不在Ω的紧致子集上一致收敛，则能找到紧致子集 $K \subset \Omega$ 和 $\{\nu\}$ 的子序列 $\{\nu_k\}$，$\{\mu_k\}$ 以及一个 $\delta > 0$，$\{z_k\} \subset K$ 使得

$$|f_{\nu_k}(z_k) - f_{\mu_k}(z_k)| \geqslant \delta.$$

由命题6，如果有必要可用 $\{\nu_k\}$ 和 $\{\mu_k\}$ 的子序列代替 $\{\nu_k\}$ 和 $\{\mu_k\}$，则可假定 $\{f_{\nu_k}\}$ 和 $\{f_{\mu_k}\}$ 是在Ω的紧致子集上一致收敛的(分别收敛于全纯函数 f 和 g) 并且 $z_k \to z_0 \in K$，则

$$|f(z_0) - g(z_0)| \geqslant \delta > 0.$$

另一方面，对 $\forall\, a \in A$，由 $\{f_\nu(a)\}$ 收敛，所以

$$f(a) - g(a) = \lim\{f_{\nu_k}(a) - f_{\mu_k}(a)\} = 0.$$

由于A是唯一性集，故 $f - g = 0$，这是矛盾的.

命题 8 设B是平面 $\mathbf{C}$ 上的半带形 $a < \mathrm{Re} z < b$，$\mathrm{Im} z > 0$，设Ω是 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的一个连通开集，$\Omega = B \times \Omega'$ 和 f 是在Ω上的一个有界全纯函数. 假设对某个 $c(a < c < b)$，有

$$\lim_{y \to \infty} f(c + iy, z') = g(z')$$

存在，而且对 Ω' 的任一紧致子集内的 z' 是一致的，则对 $\forall \varepsilon > 0$ 的区间 $a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b - \varepsilon$ 和 Ω' 上的任一紧致子集，当 $y \to \infty$ 时 $f(x + iy, z') \to g(z')$ 是一致的.

证 设 f_ν 是Ω上的全纯函数，它的定义是

$$f_\nu(z, z') = f(z + i\nu, z'),$$

则 $\{f_\nu\}$ 是一致有界的. 由假设条件

$$\lim_{y \to \infty} f(c + iy, z') = g(z'),$$

表明

$$\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(z, z') = g(z')$$

在集合 $A = \{(z, z') \in \Omega \mid \mathrm{Re} z = c, 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ 上成立. 由于A是一个唯一性集，故由命题 7 推得本命题.

第 2 章

解析开拓：初等理论

全纯函数从多圆柱边界的开拓

显然，如果Ω是 C 中的一个连通开集，$a\in \mathbf{C}-\Omega$，则有一个Ω上的全纯函数 f 不能解析开拓到 a 点(例如 $f(z)=(z-a)^{-1}$)。但这一事实在 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 内不再成立.

定理 1 (Hartogs) 设 $P=\{z\in \mathbf{C}^n \mid |z_j|<1\}$，$n>1$，设 V 是 ∂P 的一个邻域使得 $V\cap P$ 是连通的 (∂P 有一个如此的邻域所成的基本系)，则每个在 V 上全纯的函数 f，有一个在 $P\cup V$ 上的全纯函数 F，使 $F|V=f$.

证 设 $\varepsilon>0$，它使如下之集 $A\subset V$

$$A=\{z\in \mathbf{C}^n \mid 1-\varepsilon<|z_1|<1,\ |z_j|<1\ j\geqslant 2\}\cup\{z\in \mathbf{C}^n \mid 1-\varepsilon<|z_2|<1,\ |z_j|<1\ j\neq 2\},$$

设 $z'=(z_2,\cdots,z_n)$，当 $|z'|<1$，函数 $z_1\longmapsto f(z_1,z')$ 是在环 $\{z_1\in \mathbf{C} \mid 1-\varepsilon<|z_1|<1\}$ 上的一个全纯函数，所以有

$$f(z_1,z')=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu(z')z_1^\nu.$$

对 $\forall \nu\in \mathbf{Z}$，$a_\nu(z')$ 是在 $P'=\{|z_2|<1,\cdots,|z_n|<1\}$ 全纯。而现在当 $1-\varepsilon<|z_2|<1$，$|z_3|<1$，$\cdots$，$|z_n|<1$ 时，函数 $z_1\longmapsto f(z_1,z')$ 是在圆盘 $|z_1|<1$ 内全纯，所以它的 Laurent 级数不包含有 z_1 的负幂次项；即 $a_\nu(z')=0$，对 $\nu<0$ 和 $1-\varepsilon<|z_2|<1$ 成立。由第 1 章命题 1，对 $\nu<0$，$z'\in P'$ 有 $a_\nu(z')=0$。现在定义

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\in V \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z')z_1^\nu, & z\in P, \end{cases}$$

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z')z_1^\nu$ 是在 P 的紧致子集上一致收敛的幂级数，所以是全纯的，而且在 $V\cap P$ 的一个非空开子集上等于 f，因 $V\cap P$ 是连通的，所以在整个 $V\cap P$ 上等于 f。

Reinhardt 域

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个区域(连通开集)．我们称 Ω 是一个 Reinhardt 域，如果 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$ 和 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\mathbf{R}$，则有$(e^{i\theta_1}z_1,\cdots,e^{i\theta_n}z_n)\in\Omega$.

定理 2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个 Reinhardt 域，则对 Ω 上任一全纯函数 f，有一个 "Laurant 级数"

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} a_\alpha z^\alpha ,$$

它是在 Ω 的紧致子集上一致收敛于 f，而且 a_α 是由 f 唯一确定的.

证 先证唯一性．设 $w\in\Omega$ 是 Ω 中的一点，而且它的坐标为 $(w_1,\cdots,w_n)$，$w_j\neq 0$，则从级数 $\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$ 在 Ω 的紧致子集上一致收敛，可以令 $z_j=w_je^{i\theta_j}$，然后乘上 $e^{-i(\alpha_1\theta_1+\cdots+\alpha_n\theta_n)}$ 进行逐项积分(沿 $-\pi\leqslant\theta_j<\pi$)．对 $\forall\alpha\in\mathbf{Z}^n$，得到

$$a_\alpha=w^{-\alpha}(2\pi)^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(w_1e^{i\theta_1},\cdots,w_ne^{i\theta_n})\,e^{-i(\alpha_1\theta_1+\cdots+\alpha_n\theta_n)}d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

为了证明上面定理中所讲的展开式的存在性，首先注意到如果 $D=\{z\in\mathbf{C}^n \mid r_j<|z_j|<R_j,\ 0<r_j<R_j,\ j=1,\cdots,n\}$ 和 f 是在 D 上全纯，则由单复变函数的 Laurent 展开的迭代，得到 f 的一个 Laurent 级数的展式.

设 $w\in\Omega$，取 $\varepsilon>0$ 充分小，因 Ω 是一个 Reinhardt 域，故集合

$$D(w,\varepsilon)=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |w_j|-\varepsilon<|z_j|<|w_j|+\varepsilon\}$$

包含在 Ω 内．由于 $D(w,\varepsilon)$ 是具有上述 D 的形式的一个集合，故有一个 Laurent 展开

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} a_\alpha(w)z^\alpha=f(z),\qquad z\in D(w,\varepsilon),$$

它是在u的一个邻域内一致收敛于f的.现在如果有$w'\in D(w,\varepsilon)$和$\sum a_\alpha(w')z^\alpha$是对应于$w'$在集合$D(w',\ \varepsilon)\subset\Omega$中的展开，则前面的唯一性论断说明$a_\alpha(w)=a_\alpha(w')$.

因此对$\forall\,\alpha\in\mathbf{Z}^n$，函数$w\longmapsto a_\alpha(w)$在$\Omega$上是局部常值的.由于$\Omega$是连通的,故$a_\alpha(w)=a_\alpha$是与$w$无关的. 因此级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n}a_\alpha z^\alpha$$

在Ω的任一点的邻域内一致收敛于$f(z)$，因此当z在Ω的任一紧致子集时,它一致收敛于$f(z)$.

系 1 设Ω是一个 Reinhardt 域,使得对每个j, $1\leqslant j\leqslant n$,有一个点$z\in\Omega$，它的第j个坐标是 0，则Ω内的任一全纯函数f允许有一个展开

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}a_\alpha z^\alpha,$$

它在Ω的紧致子集上一致收敛.

系 2 设Ω是一个 Reinhardt 域,使得对每个j; $1\leqslant j\leqslant n$，有一点$z\in\Omega$，它的第j个坐标是 0，则Ω上的任一全纯函数f，有一个在集合

$$\tilde{\Omega}=\{(\rho_1z_1,\cdots,\ \rho_nz_n)\,|\,0\leqslant\rho_j\leqslant 1,\ (z_1,\cdots,\ z_n)\in\Omega\}$$

上的全纯扩充F（即有一个在$\tilde{\Omega}$上唯一的全纯的函数F，使$F|\Omega=f$).

系 3 设f全纯于

$$r<|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<R,\qquad 这里\ 0<r<R,$$

则f能全纯扩充(开拓)到$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<R$.

引起的问题是是否能构造一个全纯函数或多个全纯函数的“存在区域”. 在本章将给出一个全纯函数的存在区域的构造，在后面的章中将给出对一族全纯函数的存在区域的构造.

设$a\in\mathbf{C}^n$. 考虑对子集(U,f)，这里U是$\mathbf{C}^n$中的一个开集，$a\in U$，f是在U上全纯的函数. 两个这样的对子(U,f) (V,g)称之为等价，如果存在a的一个邻域W，$W\subset V\cap U$ 使$f|W=$

$g|W$. 关于这个等价关系的一个等价类称为在 a 点的全纯函数芽. 当不致引起混淆时，我们常常欢喜用一个表示这个等价类的函数来等同这个等价类. 注意一个在 a 点的芽 f_a 在 a 点的值记为 $f_a(a)$，同时 f_a 的任意次导数在 a 点的值亦是有明确定义的.

由 $\mathscr{O}_a$ 表示所有在 a 点全纯函数芽的集合. $\mathscr{O}_a$ 是一个环.

层 $\mathscr{O}$ 考虑 $\mathscr{O} = \bigcup_{a \in \mathbf{C}^n} \mathscr{O}_a$. 如果 $f \in \mathscr{O}_a$，则有一个映照 $p: \mathscr{O} \to \mathbf{C}^n$ 定义为 $p(f) = a$. 今在 $\mathscr{O}$ 上定义拓扑如下：设 $f_a \in \mathscr{O}_a$ 并设对子集 (U, f) 是定义 f_a 的. 令 $N(U, f) = \{f_b | b \in U\}$，这里 f_b 是由对子集 (U, f) 所定义的在 b 点的芽. 当 (U, f) 遍历所有定义 f_a 的对子集时，所有集 $N(U, f)$ 构成 f_a 的邻域的基本系. 这样的 $\mathscr{O}$ 称为 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数的芽层.

引理 1 映照 $p: \mathscr{O} \to \mathbf{C}^n$ 是连续的.

证 设 $f_a \in \mathscr{O}_a$，则 $p(f_a) = a$. 设 V 是 a 的一个邻域，和 (U, f) 是一个定义 f_a 的对子集，则 $p(N(U \cap V, f)) \subset V$.

引理 2 $\mathscr{O}$ 定义了上述拓扑以后，是一 Hausdorff 空间.

证 设 f_a, $g_b \in \mathscr{O}$, $f_a \neq g_b$. 当 $p(f_a) \neq p(g_b)$ 时，能找到在 $\mathbf{C}^n$ 内的分别包含 $p(f_a)$, $p(g_b)$ 的不相交的开集 Ω_a, Ω_b，则 $p^{-1}(\Omega_a)$, $p^{-1}(\Omega_b)$ 是分别包含 f_a, g_b 的不相交开集.

如果 $p(f_a) = p(g_b)$，则 f_a, $g_b \in \mathscr{O}_a$. 设 (U, f), (U', g) 分别为定义 f_a, g_b 的对子集和 V 是 a 的一个连通邻域且 $V \subset U \cap U'$，则 $N(V, f)$, $N(V, g)$ 是不相交的. 事实上，如果 $x \in N(V, f) \cap N(V, g)$，则 f 和 g 在 $p(x)$ 的一个邻域相同，由 V 是连通的，故 $f \equiv g$ 在 V 上成立；特别 $f_a = g_b$，故与假设矛盾.

引理 3 映照 $p: \mathscr{O} \to \mathbf{C}^n$ 是局部同胚；即 $\forall x \in \mathscr{O}$ 有一个邻域 N 使 $p|N$ 是同胚于 $\mathbf{C}^n$ 的一个开集.

证 如果 $x \in f_a$ 和 $N = N(U, f)$，这里 (U, f) 定义 f_a，则 $p(N) = U$. $p|N$ 之逆的定义是由 $b \longmapsto f_b$, $b \in U$, f_b 如同前面所述的 (U, f) 所定义的 b 点的芽所给出的.

在进一步叙述本章主题之前，我们将讨论具有引理 3 内性质

的空间某些一般性质.

定义 1 一个 Hausdorff 拓扑空间 X 称为是一(实) n 维流形，如果 X 的每点有一个开邻域同胚于 $\mathbf{R}^n$ 内的一个开集.

设 X 是一个 n 维流形, X' 是一个 Hausdorff 空间. 我们说连续映照 $p: X' \to X$ 是一个局部同胚，如果对每点 $a' \in X'$，有一个 a' 的开邻域 U' 使 $p(U')$ 是在 X 内开的且 $p|U'$ 是到 $p(U')$ 上的同胚. 注意此时 X' 自然地带有一个流形结构.

如果 $p: X' \to X$ 是一个局部同胚，则称 (X', p, X) 是一个 X 上的(非分支)域. 当在上下文中已将 p 交代清楚时，就称 X' 是 X 上的域.

设 $p: X' \to X$ 是一个 X 上的域和 Y 是一个 Hausdorff 拓扑空间, $f: Y \to X$ 是一个连续映照. f 到 X' 的一个提升是一个连续映照 $f': Y \to X'$ 使得 $p \circ f' = f$.

注意提升并非总是存在，且如果存在时也未必是唯一的.

引理 4 设 Y 是连通的, $f_1, f_2: Y \to X'$ 是 f 的二个提升. 假设对某点 $y_0 \in Y$，有 $f_1(y_0) = f_2(y_0)$，则 $f_1 = f_2$.

证 设 $E = \{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\}$，显然 E 是闭的和非空的. 如果 $a \in Y$，且 $b = f_1(a) = f_2(a)$，设 U' 是 b 的一个邻域使得 $p|U'$ 是到 X 的一个开集 U 上的同胚. 设 V 是 a 的一个邻域，使得 $f_1(V), f_2(V) \subset U'$, $f(V) \subset U$，则显然有

$$f_1|V = (p|U')^{-1} \circ f = f_2|V,$$

所以 E 是开的. 因为 Y 是连通的，故 $E = Y$，所以 $f_1 = f_2$.

定义 2 设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间. X 内的一条弧是一个连续映照 $\gamma: I \to X$，这里 $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$. X 内的一条围线是一条弧 γ，适合 $\gamma(0) = \gamma(1)$. 对一条弧 γ, $\gamma(0)$ 称之为起点, $\gamma(1)$ 称之为终点.

定理 3 (单值定理) 设 $I = [0, 1]$ 和 $p: X' \to X$ 是 X 上的一个域, $a \in X$ 和 $a' \in p^{-1}(a)$. 设 $F: I \times I \to X$ 是一连续映照，使得对于 $\forall u \in I$，有 $F(0, u) = a$. 对 $\forall u \in I$ 令 γ_u 是 X 内的弧 $t \to F(t, u)$.

假设对 $\forall u\in I$，有 γ_u 到 X' 上的提升 γ'_u，使得 $\gamma'_u(0)=a'$. 则由 $(t,u)\longmapsto\gamma'_u(t)$ 所定义的映照

$$F':I\times I\to X'$$

是连续的.

特别当 $F(1,u)=b$ 与 $u\in I$ 无关时，则 $F'(1,u)=b'$（因为 $F'(\{1\}\times I)$ 是离散集 $p^{-1}(b)$ 的一个连通子集）.

证 设 $u_0,t_0\in I$. 为了证明 F' 是在 (t_0,u_0) 连续的，我们按如下法进行. 设 $\{U'_1,\cdots,U'_p\}$ 是 $\gamma'_{u_0}(I)$ 的有限开覆盖，使得 $p_j=p|U'_j$ 是到 $U_j\subset X$ 上的同胚. 设 $0=\tau_0<\cdots<\tau_p=1$ 是 I 的一个分割，使得当 $\tau_{j-1}<t<\tau_j$ 时，有 $\gamma'_{u_0}(t)\in U'_j$（U'_j 和 τ'_j 可以这样选取，使上面的要求被满足）. 设 $\varepsilon>0$，使当 $|u-u_0|<\varepsilon$，$\tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j$ 时，$\gamma_u(t)\in U_j$. 因此当 $\tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j$ 和 $|u-u_0|<\varepsilon$ 时，$(j=1,\cdots,p)$ 断言 $\gamma'_u(t)=p_j^{-1}\circ F(u,t)$. 事实上，$\gamma'_u$ 和 $t\to p_1^{-1}\circ F(u,t)$ 是 $t\longmapsto F(u,t)$ $(\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1)$ 的两个提升，它们在 $t=0$ 时都等于 a'，因此由引理 4，有

$$\gamma'_u(t)=p_1^{-1}\circ F(u,t)\qquad 对\ \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1.$$

假设现在已对某个 j，$1\leqslant j<p$ 证明了

$$\gamma'_u(t)=p_j^{-1}\circ F(u,t)\qquad 对\ \tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j,\ |u-u_0|<\varepsilon,$$

则，显然 $\gamma'_{u_0}(\tau_j)=p_j^{-1}\circ F(u_0,\tau_j)=p_{j+1}^{-1}\circ F(u_0,\tau_j)$. 进一步，$p_j^{-1}\circ F(u,\tau_j)$，$p_{j+1}^{-1}\circ F(u,\tau_j)$ 是 $u\longmapsto F(u,\tau_j)$，$|u-u_0|<\varepsilon$ 的两个提升，它们在 $u=u_0$ 是重合的，因此由引理 4，对 $|u-u_0|<\varepsilon$ 有 $\gamma'_u(\tau_j)=p_{j+1}^{-1}\circ F(u,\tau_j)$. 再从引理 4，得到 $\gamma'_u(t)=p_{j+1}^{-1}\circ F(u,t)$，当 $\tau_j\leqslant t\leqslant\tau_{j+1}$，$|u-u_0|<\varepsilon$ 时成立. 故由归纳推知

$$F'(u,t)=\gamma'_u(t)=p_j^{-1}\circ F(u,t)\quad 对\ \tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j,$$
$$|u-u_0|<\varepsilon,j=1,2,\cdots,p.$$

这就直接推出对任何 $t\in I$，F' 是在 (t,u_0) 连续的.

后面将见到如何应用此定理于复分析.

定义 3 设 $p:X'\to X$ 是一个 X 上的域. 如果对每点 $a\in X$，有一个邻域 U，使得 $p^{-1}(U)$ 是开集 U'_j 的不连通和*)而且对每个 j，

---

* 不连通和的英文是 disjoint union，其定义见一般点集拓扑书. ——译者注

$p|U_i'$ 是一个到 U 上的同胚，则就称 p 是一个覆盖映照（或简称是一个覆盖）.

定义 4 一个流形 X 称为单连通的，如果它是连通的，而且对每一条围线 $\gamma: I \to X$, $I=[0,1]$，存在一个连续映照 $F: I \times I \to X$，使得

$$F(t,0)=\gamma(t), \quad F(t,1)=\gamma(1)=\gamma(0) \quad \text{对 } \forall t \in I;$$

$$F(0,u)=F(1,u)=\gamma(0) \quad \text{对 } \forall u \in I.$$

命题 1 设 $p: X' \to X$ 是一个覆盖映照，$a' \in X'$ 和 $a=p(a')$，则对任一弧 $\gamma: I \to X$; $\gamma(0)=a$，有一个提升 $\gamma': I \to X'$; $\gamma'(0)=a'$.

证 我们能找到 I 的点 $0=t_0<t_1<\cdots<t_p=1$，和开集 $U_j \subset X$ 使得

$$\gamma(t) \in U_j \quad \text{对 } t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \ j=0,\cdots,p-1;$$

$p^{-1}(U_j)=\bigcup_i U_{i,j}'$ 是不连通和，且对每个 i, $p_{ij}=p|U_{i,j}'$ 是到 U_j 上的同胚.

当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 时，定义 $\gamma'(t)=p_{i0}^{-1}\gamma(t)$，这里 i 的选取使 $a' \in U_{i,0}'$. 如果 γ' 已经对 $0 \leqslant t \leqslant t_j \ (j<p)$ 有定义，则我们对 $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$，定义 $\gamma'(t)$ 为 $\gamma'(t)=p_{k,j}^{-1}\gamma(t)$，这里 k 的选取是使 $\gamma'(t_j) \in U_{k,j}'$.

系 如果 $p: X' \to X$ 是一个覆盖映照，如果 X, X' 是连通的且 X 是单连通的，则 p 是一个同胚.

证 p 是满的. 设 $a \in p(X')$ 和 $b \in X$. 设 γ 是一个 $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$ 的弧，γ' 是 γ 的一个提升，则 $p(\gamma'(1))=b$.

p 是单的. 设 $b', c' \in X'$, $a=p(b')=p(c')$. 设 γ' 是一个 $\gamma'(0)=b'$, $\gamma'(1)=c'$ 的弧. $\gamma=p\circ\gamma'$ 是 X 内的一条围线和 $F: I \times I \to X$ 是一个连续映照具有定义 4 内所列举的性质. 由定理 3 和命题 1，有一个连续映照 $F': I \times I \to X$，使 $F'(0,0)=b'$, $p\circ F'=F$，由引理 4 $F'(t,0)=\gamma'(t)$. 因为

$$F(1,u)=F(0,u)=a$$

与 u 无关，故 $F'(0, u)$ 和 $F'(1, u)$ 也与 u 无关. 因为 $F(t, 1)$ 与 t 无关，由引理 4，故 $F'(t, 1)$ 亦与 t 无关. 因此

$$c' = \gamma'(1) = F'(1, 0) = F'(1, u) = F'(1, 1) = F'(t, 1)$$
$$= F'(0, 1) = F'(0, u) = F'(0, 0) = \gamma'(0) = b',$$

故 p 是单的.

命题 2 设 $p: X' \to X$ 是 X 上的域，设 X, X' 是连通的，则 p 是一个覆盖映照当且仅当对 $\forall a' \in X'$, $a = p(a')$ 和任一弧 $\gamma: I \to X$ 且 $\gamma(0) = a$ 有一个提升 $\gamma': I \to X'$ 且 $\gamma'(0) = a'$.

证 由于 $\forall a \in X$ 有一个邻域 U 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 内的一个凸集，故 U 是单连通的. 这个命题就从定理 3，命题 1 和上面给出的证明立刻得到.

命题 3 设 $p: X' \to X$ 是一个覆盖映照，Y 是一个单连通流形和 $f: Y \to X$ 是一连续映照. 如果 $a' \in X'$ 和 $p(a') = a = f(y_0)$ $(y_0 \in Y)$，则 f 有一个提升 $f': Y \to X'$，且使 $f'(y_0) = a'$.

证 设 $Z = Y \times X'$ 和 $Y' = \{(y, x') \in z \mid f(y) = p(x')\}$. 设 $\pi: Y' \to Y$ 是一个映照 $(y, x') \longmapsto y$. 我们断言 $\pi: Y' \to Y$ 是一个覆盖映照. 事实上，设 $y \in Y$, $f(y) = x$，设 U 是 x 的一个邻域使 $p^{-1}(U) = \bigcup U'_j$ 是一个不连通和，而且 $p_j = p|U'_j$ 是到 U 上的同胚. 设 V 是 Y 内 y 的一个邻域，使 $f(V) \subset U$，则 $\pi^{-1}(V) = \bigcup V'_j$，这里 $V'_j = \{(y, x') \in z \mid x' = p_j^{-1} \circ f(y),\ y \in V\}$ 是 V 到 X' 内的连续映照 $p_j^{-1} \circ f$ 的图. 显然 $\pi|V'_j$ 是到 V 上的同胚.

设 Y'_0 是 Y' 的包含 (y_0, a') 的连通分量，则 $\pi|Y'_0$ 是一个覆盖映照，因为 Y, Y'_0 是连通的和 Y 是单连通的，由命题 1 的系，故 $\pi_0 = \pi|Y'_0$ 是一个同胚. 如果 π' 是 Z 到 X' 内的映照 $(y, x') \longmapsto x$ 在 Y'_0 上的限制，我们可以定义

$$f'(y) = \pi' \circ \pi_0^{-1}(y).$$

系 如果 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的单连通域和 f 是 Ω 上的一个全纯函数且无处为 0，则有一个 Ω 上的全纯函数 g，使 $e^g = f$.

证 设 $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$. 映照 $p: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$; $p(z) = e^z$ 是一个覆盖映照，由假定 f 是一个映照，$f: \Omega \to \mathbf{C}^*$. 由上面的命题，存在

一个连续映照 $g:\Omega\to\mathbf{C}$，设 $f=p\circ g=e^g$．显然当 f 是全纯时，g 亦是全纯的．

命题 4（Cauchy 定理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个单连通域．给定 Ω 上的全纯函数 $g_1,\cdots,g_n$，使得

(1) $$\frac{\partial g_j}{\partial z_k}=\frac{\partial g_k}{\partial z_j}\qquad 1\leqslant j,k\leqslant n,$$

则有一个在 Ω 上全纯的函数 f 使得

(2) $$\frac{\partial f}{\partial z_j}=g_j,\qquad j=1,\cdots,n.$$

我们需要如下引理．

引理 5 设 P 是一个多圆柱 $P=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z_j-a_j|<\rho_j\}$．当 $g_1,\cdots,g_n$ 是在 P 上全纯并满足(1)时，则有 P 上的全纯函数 f 使方程(2)成立．而且 f 在差一个常数的意义下是唯一的．

证 唯一性是显然的．要证明存在性，对 n 进行归纳法．当 $n=1$ 时，有

$$g_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z-a)^\nu\qquad \text{在 } P \text{ 上},$$

可取 $f(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{c_\nu}{\nu+1}(z-a)^{\nu+1}$.

假定引理在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中已成立，设

$$g_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n^\nu,\qquad f_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu(z_1,\cdots,z_{n-1})}{\nu+1}z_n^{\nu+1},$$

则 $\dfrac{\partial f_n}{\partial z_n}=g_n$；令 $h_j=g_j-\dfrac{\partial f_n}{\partial z_j}$，$(j=1,\cdots,n)$，则有

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_k}=\frac{\partial h_k}{\partial z_j},\qquad 1\leqslant j,k\leqslant n.$$

因为 $h_n\equiv0$，我们算得 $\dfrac{\partial h_j}{\partial z_n}=0$，$j=1,\cdots,n-1$，所以 h_j 是与 z_n 无关的．由归纳假设，有 f_0 在 $P_0=\{z\in\mathbf{C}^{n-1}\,|\,|z_j-a_j|<\rho_j,\ j=1,\cdots,n-1\}$ 上全纯，而且

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_j}=h_j,\qquad j=1,\cdots,n-1.$$

今取 $f=f_0+f_n$ 就为所求.

命题 4 的证明 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数的芽层和 $p:\mathcal{O}\to\mathbf{C}^n$ 是投影. 设 $\mathcal{O}^n$ 是笛卡尔积 $\mathcal{O}\times\cdots\times\mathcal{O}$($n$ 重)的所有 $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 适合 $p(\varphi_1)=p(\varphi_2)=\cdots=p(\varphi_n)$ 的元素所组成的子集,则 p 定义了一个映照 $\pi:\mathcal{O}^n\to\mathbf{C}^n$, 它是一个局部同胚.

设 $X_0=\left\{(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\in\mathcal{O}^n\,\middle|\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_j},\ 1\leqslant j,\ k\leqslant n\right\}$,则 X_0 是 $\mathcal{O}^n$ 中的既开又闭的子集且 $\pi|X_0=\pi_0$ 是 X_0 到 $\mathbf{C}^n$ 内的局部同胚.

设 $\phi:\Omega\to X_0$ 是映照 $z\longmapsto((g_1)_z,\cdots,(g_n)_z)$, 这里 $(g_j)_z$ 表示函数 g_j 在 z 点的芽, 令 $X=\phi(\Omega)$, 则 ϕ 是从 Ω 到 X 上的一个同胚(它的逆是 $\pi_0|X$),特别地 X 是单连通的.

我们有一个映照

$$\eta:\mathcal{O}\to X_0,$$

其定义为 $(f)_a\longmapsto\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_a,\cdots,\left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)_a\right)$,这里下指标 a 是表示芽(在 a 点的), 我们证明这个 η 是一个覆盖映照. 事实上, 设 $(\varphi_{1,a},\cdots,\varphi_{n,a})\in\pi_0^{-1}(a)\subset X_0$, $a\in\mathbf{C}^n$ 和 $p(a,\rho)$ 是一个多圆柱, $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是在 $p(a,\rho)$ 上全纯且分别定义 $\varphi_{1,a},\cdots,\varphi_{n,a}$. 设 f 是 $p(a,\rho)$ 上的全纯函数而且 $\frac{\partial f}{\partial z_j}=\varphi_j$ 在 $p(a,\rho)$ 上成立. 如果 $U=\{(\varphi_{1,b},\cdots,\varphi_{n,b})\,|\,b\in p(a,\rho)\}$, 则 $\eta^{-1}(U)$ 的每一个连通分量 V 形如 $N(p(a,\rho),f')$,这里 $f'=f+c$, $c\in\mathbf{C}$. 明显地, $\eta|V$ 是同胚于 U 的.

设 X' 是 $\eta^{-1}(X)$ 的一个连通分量, 则 $\eta:X'\to X$ 是一个覆盖映照和 X', X 是连通的. 由命题 1 的系, η 是一个同胚.

现在定义 Ω 上的全纯函数 f 为 $f(z)=$ 芽 $\eta^{-1}\circ\phi(z)$ 在 z 点的值, $f'_z\in X'$ 使得 $p(f'_z)=z$. 明显地 $\frac{\partial f}{\partial z_j}=g_j$, $j=1,\cdots,n$.

定理 4 (Poincaré-Volterra 定理) 设 X 是一个拓扑空间 (Hausdorff) 且有开集可数基，Y 是一个连通流形。假设有一个连续映照 $f: Y \to X$，而且对 $\forall x \in X$，$f^{-1}(x)$ 是离散的；即对 $\forall a \in f^{-1}(x)$，有一个在 Y 内的 a 的邻域 U，使 $U \cap f^{-1}(x) = \{a\}$，则 Y 有开集可数基.

证 设 $\{X_\nu\}\nu = 1, 2, \cdots$ 是 X 的开集可数基. 考虑 Y 内的开集族 $\mathfrak{U} = \{U\}$ 如下: U 是在 Y 内相对紧并且是某个 ν 的 $\pi^{-1}(X_\nu)$ 的连通分量. 我们断言

(i) $\mathfrak{U}$ 是 Y 的开集基,

(ii) $\mathfrak{U}$ 是可数的.

(i)的证明 设 $a \in Y$，V 是 Y 的开集且 $a \in V$. 设 W 是 Y 内的相对紧致开集且 $a \in W \subset \overline{W} \subset V$ 和 $\overline{W} \cap f^{-1}f(a) = \{a\}$，则 ∂W 是紧的，故 $f(\partial W)$ 也是紧的，而且 $f(a) \bar{\in} f(\partial W)$. 设 ν 是使 $f(a) \in X_\nu \subset X - f(\partial W)$ 和 U 是 $f^{-1}(X_\nu)$ 中包含有 a 的连通分量，则 $U \subset W$ (否则 $U \cap \partial W \neq \varnothing$ 和 $X_\nu \cap f(\partial W) \supset f(U) \cap f(\partial W) \neq \varnothing$). 特别地 U 是相对紧致的，这就证明了 (i).

(ii)的证明 如果 $U \in \mathfrak{U}$，U 必是有限个同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的开集的开子集的和，这推知 U 具有如下性质:

(*) 如果 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 U 的一个非空开集的族，而且 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ 当 $\alpha \neq \beta$，则 A 是可数的.

注意 $\mathfrak{U}$ 内的集合的可数和也具有性质(*).

设 $U_0 \in \mathfrak{U}$，归纳地定义

$$\mathfrak{U}_0 = \{U_0\}, \mathfrak{U}_k = \{U \in \mathfrak{U} |,$$

存在 $V \in \mathfrak{U}_{k-1}$ 使 $V \cap U \neq \varnothing\}$.

断言 (a) $\bigcup \mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}$，(b) $\mathfrak{U}_k$ 是可数的.

(a). 设 $\Omega = \bigcup U$，这里求和是对所有 $U \in \bigcup \mathfrak{U}_k$ 所作，$\Omega' = \bigcup V$ 这里求和是对所有 $V \in \mathfrak{U} - \bigcup \mathfrak{U}_k$ 所作，则 $\Omega \cup \Omega' = Y$，Ω，Ω' 都是开的，由 $\mathfrak{U}_k$ 的定义 $\Omega \cap \Omega' = \varnothing$. Y 是连通的，故 $\Omega' = \varnothing$，故 $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{U}_k$.

(b). $\mathfrak{U}_0$ 是可数的. 假如 $\mathfrak{U}_{k-1}$ 是可数的，则令

$$\Omega = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_{k-1}} U.$$

对每个 ν，由(＊)得出 $f^{-1}(X_\nu)$ 的连通分量的族 F_ν 与 Ω 之交是可数的．因为 $\mathfrak{U}_k \subset \bigcup_\nu F_\nu$，故 $\mathfrak{U}_k$ 是可数的．

这证明了定理．

注 此定理在对 Y 更弱的假设下亦成立，即 Y 是连通、局部紧和局部连通时．证明是用 f 有离散纤维和 X 有一个可数开集基以及 Y 的每点有一个可数的邻域基本系．然后性质(*)易被建立和上面的证明可被应用．

系 $\mathcal{O}$ 的任一连通分量具有可数基．

定义 5 设 $p: X \to \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个域．连续函数 $f: X \to \mathbf{C}$ 称为全纯(关于 p)，如果对每个 $a \in X$，有一个 a 的邻域 U 使得

(i) $p|U$ 是到开集 $V \subset \mathbf{C}^n$ 上的一个同胚，

(ii) 函数 $f \circ (p|U)^{-1}$ 是在 V 上全纯．

我们也定义 f 的导数 $D^\alpha f$ 为

$$D^\alpha f \circ (p|U)^{-1} = D^\alpha (f \circ (p|U)^{-1}),$$

这里 U 同(i)，等式右边的导数是对 V 上的函数作的．

定义 6 设 $p: X \to \mathbf{C}^n$，$p': X' \to \mathbf{C}^m$ 分别是 $\mathbf{C}^n$，$\mathbf{C}^m$ 上的域．一个连续映照 $u: X \to X'$ 称为全纯的，如果对任一开集 $V' \subset X'$ 和 f' 在 V' 上全纯，函数 $f' \circ u$ 是在 $u^{-1}(V')$ 上全纯．

第 1 章中很多定理显然能推广到 $\mathbf{C}^n$ 上的域．

现在设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的连通开集和 f 是 Ω 上的全纯函数，$p: X \to \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域．我们说 f 能解析开拓到 X，如果有一个全纯映照 $u: \Omega \to X$ 和一个 X 上的全纯函数 g，使得

(i) $p \circ u$ 是 Ω 到 $\mathbf{C}^n$ 内的内射；

(ii) $g \circ u = f$.

注意这样的 g 如果存在必是唯一的(因为 g 在 $u(\Omega)$ 上是决定于 f 的，$u(\Omega)$ 是在 X 内开的，故能应用解析开拓原理；见下面)．

命题 5 (解析开拓原理) 设 $p: X \to \mathbf{C}^n$，$p': X' \to \mathbf{C}^m$ 分别

是 $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^m$ 上的域，设X是连通的且$f, g: X \to X'$ 是二个全纯映照．如果 $f = g$ 在X的一个非空开集上成立,则$f \equiv g$.（特别，X上二个全纯函数,如果在X的一个非空开子集上相同,则就是同一个）.

证 设E是 $a \in X$ 的集合,这里的a是要使得 $f = g$ 在a的一个邻域中成立．显然E是开的.现在来证明它是闭的,从 $f = g$ 在E上成立,故 $f = g$ 在 $\bar{E}$ 上成立．设 $b \in \bar{E}$ 和

$$y_0 = f(b) = g(b).$$

令V是y_0的一个开邻域使 $p'|V$ 是到 $\mathbf{C}^m$ 的一个开集W上的同胚．设U是b的开邻域且 $p|U$ 是同胚于 $\mathbf{C}^n$ 内的一个多圆柱P而且 $U \subset f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$，则 $p' \circ f \circ p^{-1}$ 和 $p' \circ g \circ p^{-1}$ 都是P到W内的全纯映照,而且在开集 $p(E \cap U)$ 上相同.由于 $b \in \bar{E}$，故 $p(E \cap U)$是非空的．因此(由第1章命题1应用到 $p' \circ f \circ p^{-1}$ 和 $p' \circ g \circ p^{-1}$ 这二个到 $\mathbf{C}^m$ 内映照的每个分量上）$p' \circ f \circ p^{-1} = p' \circ g \circ p^{-1}$ 在P上成立．从 $p'|V$ 是一个同胚，推知 $f = g$ 在U上成立，因此$U \subset E$，由于 $b \in E$，故E是闭的．

定理5 对 $\mathbf{C}^n$ 内连通开集Ω上的每个全纯函数f，有一个连通域 $p: X \to \mathbf{C}^n$（$\mathbf{C}^n$ 上的域）和一个f到X的解析开拓g具有下面的性质．

对任何一个连通域 $p': X' \to \mathbf{C}^n$ 和f到X'的解析开拓g'，有一个全纯映照 $\varphi: X' \to X$ 使 $p \circ \varphi = p'$ 和 $f \circ \varphi = f'$.

证 设X是包含f_a的$\mathcal{O}$的连通分量,这里 $a \in \Omega$，f_a是由f在a点所定义的芽．设 $p: X \to \mathbf{C}^n$ 是$\mathcal{O}$到 $\mathbf{C}^n$ 的投影在X上的限制．$g: X \to \mathbf{C}$ 定义如下：$g(k_z)$ 等于k_z在z点的值，这里k_z是在z点的芽．设 $u: \Omega \to \mathcal{O}$ 是一映照，$u(z) = f$ 在z点的芽．显然的，u是连续的．从Ω是连通的，$u(\Omega) \subset X$，故得到映照 $u: \Omega \to X$．显然 $p \circ u = \Omega$ 到 $\mathbf{C}^n$ 内的内射，$g \circ u = f$.

如果 $p': X' \to \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的另一个连通域，$u': \Omega \to X'$ 和 $g': X' \to \mathbf{C}$ 定义了f到X'的一个解析开拓,则我们定义 $\varphi: X' \to X$ 如下．

设 $x'\in X'$，$a'=p'(x')$，U' 是 x' 的一个邻域且 p' 将它同胚地映为 $\mathbf{C}^n$ 的一个开子集 U，在 U 上令 $h=g'\circ p'^{-1}$．今设 $\varphi(x')$ 是 h 在 a' 的芽．由于 X' 是连通的，这给出了一个连续映照 $\varphi: X'\to\mathscr{O}$．明显的 $\varphi(u'(\Omega))\subset X$．由于 X' 是连通的，这就是给出了一个映照 $\varphi: X'\to X$，对此验证定理中所陈述的各性质是十分容易的．

后面（在第 6 章中）将看到这个构造如何被推广到全纯函数族和导致全纯域的理论．

第 3 章

次调和函数与 Hartogs 定理

调和函数和次调和函数的定义与基本性质

设Ω是C内的一个开集,我们写 $z=x+iy$; $z\in\mathbf{C}$, $x,y\in\mathbf{R}$. 如果 u 是一个在Ω上有二次连续微商的(实值或复值)函数,我们有

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}}.$$

定义 1 u 称为在Ω内调和,如果 $\Delta u\equiv 0$.

注 一个调和函数的实部和虚部都是调和的. 每个全纯函数 f 都是调和的(因为 $\Delta f=4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)=4\frac{\partial}{\partial z}(0)=0\Big)$.

定义 2 设 s 是Ω上的实值函数 (值允许取 $-\infty$, 但不允许取$+\infty$). 如果对任一 $U\Subset\Omega$, 有

$$s(z)\leqslant\sup_{\zeta\in\partial U}s(\zeta),\qquad z\in U,$$

就称极大值原理对 s 成立.

命题 1 极大值原理对Ω上任一实值调和函数成立.

这是下面的命题的结果.

命题 2 对任一有二次连续微商的实值函数 u, 且 $\Delta u\geqslant 0$, 则极大值原理成立.

证 只要对 $\Delta u>0$ 在Ω上每点成立的情况证明此结果就够了. 事实上,令 $u_\varepsilon(z)=u(z)+\varepsilon|z|^2$, 则 $\Delta u_\varepsilon=\Delta u+4\varepsilon>0$, 所以

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(z)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{\zeta\in\partial U}u_\varepsilon(\zeta)\right)=\sup_{\zeta\in\partial U}u(\zeta).$$

假设 $\Delta u>0$ 在Ω上处处成立并且 $u(a)\geqslant\sup_{\zeta\in U}u(\zeta)$, $a\in U$, 对 $U\Subset\Omega$; 设 $\sup_{z\in U}u(z)=u(z_0)$, 则 $z_0\in U$ 和函数

$$g(t) = u(x_0, t)$$

在 $t = y_0$ 有极大值 $(z_0 = x_0 + iy_0)$. 因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) = \frac{d^2}{dt^2}g(y_0)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\{g(y_0+h)+g(y_0-h)-2g(y_0)\} \leqslant 0.$$

同样有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) \leqslant 0$, 所以 $\Delta u(z_0) \leqslant 0$ 故矛盾.

命题 3 设 $a \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$ 和对 $|z-a| < \rho$, $0 < \theta \leqslant 2\pi$, 令 $P(z,\theta) = P_{a,\rho}(z,\theta) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta}+(z-a)}{\rho e^{i\theta}-(z-a)}\right)$, 则 $P(z,\theta) \geqslant 0$. 而且如果 $h(\theta)$ 是一个 $h(0) = h(2\pi)$ 的连续函数, 令 $z_0 = a + \rho e^{i\theta_0}$, 则

$$\lim_{z\to z_0}\int_0^{2\pi} P(z,\theta)\,h(\theta)\,d\theta = h(\theta_0),$$

此极限关于 θ_0 是一致的.

证 无妨假定 $a = 0$, $\rho = 1$ 和 $h(\theta) = \varphi(e^{i\theta})$, 这里 φ 是在圆周 $|z| = 1$ 上连续的. 现在

$$P_{0,1}(z,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\text{*)},$$

所以 $P(z,\theta) \geqslant 0$. 而且对 $|z| < 1$,

$$\int_0^{2\pi} P(z,\theta)d\theta = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\} = 1.$$

因此, 对 $|z| < 1$,

$$T = \int_0^{2\pi} P(z,\theta)h(\theta)d\theta - h(\theta_0)$$

---

*) 原书此处为 "$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$", 漏了因子 $\frac{1}{2\pi}$. ——译者注

$$= \int_0^{2\pi} P(z, \theta)\{\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta_0})\}d\theta.$$

设 $\varepsilon > 0$，则存在 $\delta > 0$，使当 $|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \delta$ 时，有

$$|\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta_0})| < \varepsilon.$$

因此，由 $P \geqslant 0$，我们有

$$|T| \leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} P(z, \theta)d\theta + 2M \int_{|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| \geqslant \delta} P(z, \theta)d\theta,$$

这里 $M = \sup|\varphi(e^{i\theta})|$. 从 $\int_0^{2\pi} P(z, \theta)d\theta = 1$ 和

$$P(z, \theta) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi|e^{i\theta} - z|^2}$$

推知，如果 $|z - e^{i\theta_0}|$ 趋于 0，则 $P(z, \theta)$ 在 $|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| \geqslant \delta$ 上一致地趋于 0. 因此 $\lim\limits_{z \to e^{i\theta_0}} |T| \leqslant \varepsilon$，现在 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故推得结果.

系 1 如果 u 是在 Ω 内调和，$a \in \Omega$ 和

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| \leqslant \rho\} \subset \Omega,$$

则对 $|z - a| < \rho$，有

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(z, \theta)u(a + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

证 可以假定 u 是实值. 函数

$$v(z) = \int_0^{2\pi} P(z, \theta)u(a + \rho e^{i\theta})d\theta$$

是全纯函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} + (z - a)}{\rho e^{i\theta} - (z - a)} u(a + \rho e^{i\theta})d\theta$$

在 $|z - a| < \rho$ 内的实部，所以是调和的. 由命题 1 和命题 3 推出此系.

系 2 每个调和函数是 (x, y) $(z = x + iy)$ 的实解析函数.

定义 3 设 u 是一个从 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 到 $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 内的映照，且 $u(\Omega) \neq -\infty$. 我们称 u 是上半连续. 如果

$$\overline{\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}}} u(z) \leqslant u(a); \qquad \forall a \in \Omega,$$

等价的说法是，如果对 $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}$，集合 $\{z\in\Omega\,|\,u(z)<\alpha\}$ 是 Ω 中的开集.

注意如果 u 是上半连续的，则它在每个紧致集 $K\subset\Omega$ 上是有上界的，事实上，K 是包含在开集 $\{z\in\Omega\,|\,u(z)<\nu\}$ 的增序列之和集中，所以其必在某一个之中.

引理 1 设 u 是在 Ω 内上半连续的且有上界，则有一个 Ω 上的连续函数的序列 $\{u_k\}$ 使 $u_k(z)$ 对所有 $z\in\Omega$，是递减到 $u(z)$.

证 令 $u_k(z)=\sup\limits_{\zeta\in\Omega}\{u(\zeta)-k|\zeta-z|\}$，$M=\sup\limits_{\zeta\in\Omega}u(\zeta)$.
显然对所有 $z\in\Omega$ 有 $-\infty<u_k(z)<+\infty$，我们有

$$u_k(z)\geqslant u(z)-k|z-z|=u(z).$$

而且因为序列 $u(\zeta)-k|\zeta-z|$ 当 k 增加时是递减的（对固定的 ζ，z），故 $u_k(z)$ 对每个 z 是递减的. 进一步，当 z，$z'\in\Omega$，$\forall\zeta\in\Omega$ 有

$$u_k(z)\geqslant u(\zeta)-k|\zeta-z|\geqslant u(\zeta)-k|\zeta-z'|-k|z-z'|.$$

故

$$u_k(z)\geqslant u_k(z')-k|z-z'|,$$

因此

$$|u_k(z)-u_k(z')|\leqslant k|z-z'|,$$

所以 u_k 在 Ω 上连续.

要证明当 $k\to\infty$ 时，有 $u_k(z)\to u(z)$. 首先假设 $u(z)>-\infty$. 设 $\varepsilon>0$ 和 $\Omega'=\{z'\in\Omega\,|\,u(z')<u(z)+\varepsilon\}$；$\Omega'$ 是 z 的一个开邻域，它包含一个圆盘 $|z'-z|<\delta$. 设 k_0 满足 $M-k_0\delta<u(z)$，则 $u(z')-k|z'-z|\leqslant u(z')<u(z)+\varepsilon$，对 $z'\in\Omega'$ 成立. 另外，$u(z')-k|z'-z|<M-k_0\delta<u(z)$，当 $z'\bar{\in}\Omega'$，$k\geqslant k_0$ 时成立，故当 $k\geqslant k_0$ 时，$u(z)\leqslant u_k(z)<u(z)+\varepsilon$，所以当 $k\to\infty$ 时有 $u_k(z)\to u(z)$. 如果 $u(z)=-\infty$ 和 $c>0$，则

$$\Omega'=\{z'\in\Omega\,|\,u(z')<-c\},$$

包含一个圆盘 $|z'-z|<\delta$，所以如前面之假定

$$u_k(z)\leqslant\max(-c,M-k\delta).$$

故当 $k \to \infty$ 时有 $u_k(z) \to -\infty$.

定义 4 设 Ω 是 C 内的一个开集和 u 是 Ω 上的上半连续函数且在 Ω 的每个连通分量上 $u \not\equiv -\infty$，称 u 是次调和的，如果下列条件被满足.

对任一开集 $U \Subset \Omega$ 和任一 $\bar{U}$ 上的实值连续函数 h，且 h 在 U 上调和，如果 $u(z) \leqslant h(z)$ 对 $\forall z \in \partial U$ 成立，则 $u(z) \leqslant h(z)$ 对 $\forall z \in U$ 亦成立.

注 1 $I=(a, b) \subset \mathrm{R}$ $\Delta h=0$ 的解是线性函数 $h(t)=\alpha t+\beta$，这里 $\Delta = \frac{d^2}{dt^2}$. 在 I 上的函数 u，使得 $u(t_0) \leqslant h(t_0)$，$u(t_1) \leqslant h(t_1)$ 表明 $u(t) \leqslant h(t)$ 对 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 成立.（这里 $t_0 < t_1$ 属于 I 和 h 是一个线性函数)，u 就是凸函数. 因此次调和函数可看成是凸函数的复推广.

注 2 定义 4 可改叙如下.

对任一开集 $U \Subset \Omega$ 和任一在 U 上调和的实值函数 h，极大值原理对 $u-h$ 成立.

引理 2 设 u 在开集 $\Omega \subset \mathrm{C}$ 上次调和，则有

(a) 集合 $\{z \in \Omega \mid u(z) = -\infty\}$ 不包含非空开集.

(b) 如果 $a \in \Omega$ 和 $\rho > 0$ 使 $\{z \in \mathrm{C} \mid |z-a| \leqslant \rho\} \subset \Omega$，则

$$\int_0^{2\pi} |u(a+\rho e^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

证 (a) 假设论断不成立. 则有一个 $a \in \Omega$ 和 $\rho > 0$，使

$$K = \{z \in \mathrm{C} \mid |z-a| \leqslant \rho\} \subset \Omega$$

并有某个 $z_0 \in K$ $u(z_0) > -\infty$ 和 $u(z) = -\infty$ 在 ∂K 的某个非空开子集上成立. 设 $\{u_k\}$ 是在 K 上 (K 的一个邻域上) 递减的趋于 u (引理 1). 设

$$h_k(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, \theta) u_k(a+\rho e^{i\theta}) d\theta,$$

则 h_k 是在 K 上连续与在 $\mathring{K}$ 上调和(命题 3). 而且当 $z \in \partial K$ 时，有 $h_k(z) = u_k(z) \geqslant u(z)$. 因此，由次调和函数的定义，得

$$u(z_0) \leqslant h_k(z_0).$$

从 u_k 是递减的趋于 u 和 $P_{a,\rho}(z_0,\theta)$ 是正的，得到

$$-\infty < u(z_0) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} h_k(z_0) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})d\theta,$$

这与我们假定 $u(a+\rho e^{i\theta}) = -\infty$ 对 θ 在 $[0, 2\pi]$ 的一个非空开子集上成立矛盾(因为 u 在 K 上有上界).

(b) 设 $K=\{z\in\mathbf{C} \mid |z-a| \leqslant \rho\} \subset \Omega$, 设 $\{u_k\}$ 是在 K 上递减的趋于 u 的连续函数序列. 设 $M = \sup\limits_{z\in K} u_1(z)$, 则 $u_k(z) \leqslant M$ 对 $\forall z\in K$ 成立，令 $u_k^- = \min(u_k, 0)$. 设 $z_0 \in \mathring{K}$ 是 $u(z_0) > -\infty$ 的点. 如同在 (a) 的证明中，

$$\begin{aligned} u(z_0) &\leqslant \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\theta)u_k(a+\rho e^{i\theta})d\theta \\ &\leqslant C\cdot M + \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\theta)u_k^-(a+\rho e^{i\theta})d\theta, \end{aligned}$$

这里 $C = \sup\limits_{\theta} 2\pi P_{a,\rho}(z_0,\theta)$ *), 如果令 $u^- = \min(u, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\theta)|u^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta \\ &= \lim_{k\to\infty} -\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\theta)u_k^-(a+\rho e^{i\theta})d\theta \\ &\leqslant C\cdot M - u(z_0). \end{aligned}$$

由于 $P_{a,\rho}(z_0,\theta) \geqslant \delta > 0$ 对所有 θ 成立，故推出

$$\int_0^{2\pi} |u^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta < \infty,$$

再由 u 在 K 上有上界，就证得引理.

命题 4 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 内的一个开集和 u 是 Ω 上的一个上半连续函数而且它在 Ω 的任一连通分量上不恒为 $-\infty$. 则 u 是在 Ω 上次调和的当且仅当它适合

(*)对 $\forall a\in\Omega$, 存在 $R=R(a)>0$ 使

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\theta})d\theta \text{ 对 } 0<\rho<R(a) \text{ 成立.}$$

*) 原书误为 "$C=\sup\limits_{\theta} P_{a,\rho}(z_0,\theta)$".——译者注

证 可以假定Ω是连通的.

(i) 假设u是次调和的，设 $K=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z-a|\leqslant R\}\subset\Omega$，令 $\{u_k\}$ 是K上的递减趋于u的连续函数序列并且对 $z\in\mathring{K}$，$0<\rho<R$，

$$h_k(z)=\int_0^{2\pi}P_{a,\rho}(z,\theta)u_k(a+\rho e^{i\theta})d\theta,$$

则 h_k 是在K上连续，在 $\mathring{K}$ 上调和且 $h_k(z)=u_k(z)\geqslant u(z)$ 对 $z\in\partial K$ 成立. 因此 $u(z)\leqslant h_k(z)$; $z\in K$. 故

$$u(z)\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}h_k(z)=\int_0^{2\pi}P_{a,\rho}(z,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})d\theta,\qquad z\in\mathring{K}.$$

特别取 $z=a$ 时，

$$P_{a,\rho}(a,\theta)=\frac{1}{2\pi},\qquad u(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

(ii) 证明其逆，由定义 4 后面的注 2 和命题 3 的系 1，只要证明，如果u满足条件(*)，则极大值原理对u成立.

设$U\Subset\Omega$并且假设 $u(z_0)>\sup\limits_{z\in\partial U}u(z)$，$z_0\in U$. 则

$$\sup_{z\in U}u(z)>\sup_{\zeta\in\partial U}u(\zeta).$$

由于u是上半连续的，故存在 $a\in\overline{U}$ 使得 $u(a)=\sup\limits_{z\in U}u(z)$，显然 $a\bar{\in}\partial U$，故 $a\in U$. 今将证明，如果(*)成立，u在U中之包含a之连通分量V上必为常数；这是不可能的，因为

$$u(a)>\sup_{\zeta\in\partial U}u(\zeta)\geqslant\sup_{\zeta\partial\partial V}u(\zeta).$$

设 $E=\{z\in V\,|\,u(z)=u(a)\}$. 则$E$非空并且因为$u$是上半连续的，故$E$是闭的. 显然这里 $u(a)>-\infty$.

设 $b\in E$ 和 $R=R(b)>0$ 使 $\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z-b|\leqslant R\}\subset V$ 和

$$u(a)=u(b)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(b+\rho e^{i\theta})d\theta$$

对 $0<\rho\leqslant R$ 成立. 如果 $u(b+\rho e^{i\theta_0})\leqslant u(a)-\varepsilon$, $\varepsilon>0$，则

$$u(b+\rho e^{i\theta})<u(a)-\varepsilon/2$$

对 $[0,2\pi]$ 中的一个非空开子集I中的θ成立. 因此，如果μ表

示直线上的 Lebesgue 测度，则有

$$u(a)=u(b)\leqslant\frac{1}{2\pi}\mu([0.2\pi]-I)u(a)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\mu(I)[u(a)-\varepsilon/2]<u(a),$$

这是矛盾的．因此 $u(b+\rho e^{i\theta})=u(a)$ 对所有 $\theta\in[0,2\pi]$ 成立，而且对所有 ρ, $0<\rho<R$ 亦然．此即 E 为开的，故命题证毕．

注　如果 u 是在 Ω 内次调和的并且 $\{z\in\mathbf{C}\mid|z-a|\leqslant\rho\}\subseteq\Omega$，则对 $|z-a|<\rho$，有

$$u(z)\leqslant\int_0^{2\pi}P_{a,\rho}(z,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

这是命题 4 的证明中之 (i)．

一些例子和应用

系 1　如果 u_1, u_2 是次调和的，对 $\lambda_1\geqslant0$, $\lambda_2\geqslant0$，则 $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$ 也是次调和的．

系 2　如果 u_1, u_2 是次调和的，则 $u=\max(u_1,u_2)$ 也是次调和的．

证　$\forall a\in\Omega$, $u(a)=u_j(a)$, $j=1,2$,

$$u(a)=u_j(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_j(a+\rho e^{i\theta})d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})d\theta$$

对充分小的 ρ 成立．

系 3　如果 $\{u_\alpha\}$ 是 Ω 内的次调和函数族，函数

$$z\longmapsto u(z)=\sup_\alpha u_\alpha(z)$$

是在 Ω 内上半连续的，则 u 是次调和的（应用上面的注，同系 2 之证明）．

系 4　如果 u 是在 Ω 上次调和的，$\forall a\in\Omega$，则

$$u(a)=\varlimsup_{z\to a,\ z\neq a}u(z).$$

证　设 $l=\varlimsup_{z\to a,\ z\neq a}u(z)$．由于 u 是上半连续的，故

$$l\leqslant u(a).$$

如果 $l < u(a)$，则有 $u(a+\rho e^{i\theta}) < l'$（这里 $l < l' < u(a)$）对充分小的 $\rho \neq 0$ 成立，这与(*)矛盾.

系 5 如果 u 是连续函数，而且 u 与 $-u$ 都是次调和的，则 u 是调和的.

证 对 $\forall a \in \Omega$，立刻得到

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\theta) u(a+\rho e^{i\theta}) d\theta,$$

对 $|z-a| < \rho$ 成立，这里 ρ 是充分小的正实数.

系 6 （命题 3 之逆）如果 u 是一个连续函数而且对每个 $a \in \Omega$ 存在 $R(a) > 0$，使对 $0 < \rho < R(a)$ 有

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\theta}) d\theta,$$

则 u 是调和的.

证 因为 u 和 $-u$ 都是次调和的.

系 7 如果对 Ω 的每个点，都有一个邻域使函数 u 在其上是次调和的，则 u 在 Ω 上是次调和的.

命题 5 设 u 是开集 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 上的一个有二次连续微商的实值函数，则 u 是次调和当且仅当 $\Delta u \geqslant 0$ 在 Ω 内处处成立.

证 (i) 假设 $\Delta u \geqslant 0$ 在 Ω 上处处成立. 如果 h 是在 $U \Subset \Omega$ 上的一个调和函数，则在 U 上有

$$\Delta(u-h) = \Delta u \geqslant 0.$$

因此由命题 2，极大值原理对 $u-h$ 成立，故由定义 4 后面的注 2，u 是次调和的.

(ii) 反之，假设 u 是次调和的且有 $\Delta u(a) < 0$，$a \in \Omega$，则有一个 a 的开邻域 U，使 $\Delta u(z) < 0$ 对 $\forall z \in U$ 成立. 由 (i) $-u$ 是在 U 上次调和的，再由前面的系 5，u 是在 U 上调和的，所以 $\Delta u(a) = 0$，矛盾.

例 设 f 是在开集 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 上的一个全纯函数.

(i) 如果 f 在 Ω 的任一连通分量上不恒为零，则

$$u(z) = \log|f(z)|$$

是次调和的.

证 我们来验证命题 4 的条件(*).设 $a\in\Omega$. 如果 $f(a)=0$, $u(a)=-\infty$, 则条件(*)显然成立. 如果 $f(a)\neq 0$, 则在以 a 为心的一个圆盘中 f 不具有零点,故 u 是一个全纯函数(任意的适合 $e^g=f$ 的全纯函数 g)的实部,故 u 是调和的,当然 u 是次调和的.

(ii) 对任何 $\alpha>0$, $u(z)=|f(z)|^\alpha$ 是在 Ω 上次调和的.

证 如果 $f(a)=0$, 条件(*)是显然成立的. 如果 f 在以 a 为中心的一个圆盘 D 上没有零点,则 $u(z)=|g(z)|$, 这里

$$g(z)=e^{\alpha\log f(z)}$$

是在 D 上全纯的. 因此 ρ 充分小时,有

$$g(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(a+\rho e^{i\theta})d\theta;$$

因此

$$u(a)=|g(a)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(a+\rho e^{i\theta})|d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

(iii) 如果 u 是在 Ω 上连续,对某个 $a\in\Omega$, u 又是在 $\Omega-\{a\}$ 上次调和的,则 u 是在 Ω 上次调和的.

证 对任意 $\varepsilon>0$, $u_\varepsilon(z)=u(z)+\varepsilon\log|z-a|$ 是在 Ω 上次调和的: 条件(*)对 u_ε 在 a 点显然满足, 而对任一不等于 a 的点,则在此点的一个邻域中 u 和 $\log|z-a|$ 都是次调和的. 因此对 $z\neq a$ $|z-a|<\rho$, ρ 充分小,有

$$u(z)+\varepsilon\log|z-a|\leqslant\int_0^{2\pi}P_{a,\rho}(z,\theta)u_\varepsilon(a+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

因为 u 和 u_ε 对 $z\neq a$ 都是连续的,当 $\varepsilon\to 0$ 时,得到

$$u(z)\leqslant\int_0^{2\pi}P_{a,\rho}(z,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})d\theta \text{ 对 } |z-a|<\rho, z\neq a \text{ 成立.}$$

由连续性,此不等式对 $z=a$ 亦成立,故得出我们所要的结果.

注 当例子中的一个点,被 Ω 的可数个点所代替时,用类似的方法可证明同样的结果.

命题 6（Hadamand 三圆定理） 设

$$R > 0 \text{ 和 } \Omega = \{z \in \mathbf{C} | 0 < |z| < R\}.$$

设 f 是在 Ω 上全纯且不恒为零*），对 $0 < r < R$ 令

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|,$$

则 $\log M(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数，即 $\log M(e^t)$ 是 t 的凸函数.

证 设 $u(z) = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \log |f(ze^{i\alpha})|$，则 u 在 Ω 上是连续的和 $u(z) = \log M(|z|)$. 由前面的例 (i) 和命题 4 的系 3，u 是在 Ω 内次调和的.

现在对 $r_0, r_1, 0 < r_0 < r_1 < R$ 假设

$$\log M(r) \leqslant l(\log r),$$

这里 l 是一个线性函数，$l(t) = \alpha t + \beta$. 我们必须证明

$$\log M(r) \leqslant l(\log r)$$

对 $r_0 < r < r_1$ 成立. 现在

$$u(z) \leqslant h(z) \text{ 对 } z \in \partial U \text{ 成立，} U = \{z \in \Omega | r_0 < |z| < r_1\},$$

这里 $h(z) = \alpha \log |z| + \beta$ 是在 Ω 内调和的，因 u 是次调和，这个不等式在 U 内成立，故命题得证.

注 这个结果能表示为

$$m(r) \leqslant M(r_0)^{\eta} M(r_1)^{1-\eta}, \qquad r_0 < r < r_1$$

这里 $\eta = \dfrac{\log r_1 - \log r}{\log r_1 - \log r_0}$.

下面的命题是 Hartogs 基本定理证明中之主要步骤之一.

命题 7（Hartogs） 设 $R > 0$，$D = \{z \in \mathbf{C} | |z| < R\}$，和 $\{u_k\}$ 是 D 内的次调和函数序列. 假设如下两个条件被满足：

(i) 存在 $M > 0$ 使 $u_k(z) \leqslant M$ 对 $\forall z \in D$ 和所有 k 成立.

(ii) 对所有 z 适合 $|z| = \rho$，$\rho < R$，有 $\varlimsup_{k \to \infty} u_k(z) \leqslant m$，则当 $r < \rho$ 和 $m_k = m_k(r) = \sup_{|z| \leqslant r} u_k(z)$，我们有

---

*）原书漏了 f 不恒为零的条件.——译者注

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} m_k \leqslant m.$$

特别是当 (ii) 对所有 $z\in D$ 成立，则上面的结论对所有 $r<R$ 成立.

证 (a) 设 $\varepsilon>0$，则存在 $E\subset[0,2\pi]$ 且 $\mu(E)<\varepsilon$ (μ 表示 Lebesque 测度)和 k_0，使得当 $\theta\bar{\in}E, k\geqslant k_0$ 时有 $u_k(\rho e^{i\theta})<m+\varepsilon$.

事实上，令 $E_k=\bigcup_{l\geqslant k}\{\theta\in[0,2\pi]\,|\,u_l(\rho e^{i\theta})\geqslant m+\varepsilon\}$，从 $\overline{\lim}\, u_k(z)\leqslant m$ 对 $|z|=\rho$ 成立，有 $\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\varnothing$. 现在 $E_k\supset E_{k+1}$*). 因此存在 k_0，使 $\mu(E_{k_0})<\varepsilon$，令 $E=E_{k_0}$. 显然对这样得到的 E 和 k_0 满足 (a) 的要求.

(b) 命题的证明. 对 $|z|\leqslant r<\rho$，有

$$u_k(z)\leqslant\int_0^{2\pi}P_{0,\rho}(z,\theta)u_k(\rho e^{i\theta})d\theta.$$

如果令 $C=\sup\limits_{\substack{\theta\in[0,2\pi]\\|z|\leqslant r}}P_{0,\rho}(z,\theta)$，和 $E'=[0,2\pi]-E$，则有

$$\begin{aligned}u_k(z)&\leqslant C\int_E u_k(\rho e^{i\theta})d\theta+\int_{E'}P_{0,\rho}(z,\theta)u_k(\rho e^{i\theta})d\theta\\&\leqslant MC\mu(E)+\int_{E'}P_{0,\rho}(z,\theta)(m+\varepsilon)d\theta\leqslant MC\varepsilon+(m+\varepsilon),\\&\qquad\qquad(k\geqslant k_0)\end{aligned}$$

上面用到

$$\int_{E'}P_{0,\rho}(z,\theta)d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}P_{0,\rho}(z,\theta)d\theta=1.$$

因此 $m_k(r)\leqslant MC\varepsilon+m+\varepsilon$ (当 $k\geqslant k_0$)，故得到命题.

注 如果 h 是一个在 $|z|\leqslant\rho$ 上连续并且在 $|z|<\rho$ 内调和的函数，如果 $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, u_k(z)\leqslant h(z)$ 对所有 $z,|z|=\rho$ 成立，则对 $r<\rho$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k(r)\leqslant 0$，这里 $\alpha_k(r)=\sup\limits_{|z|\leqslant r}\{u_k(z)-h(z)\}$. 证明与上命题相同，自然假定 (i) 是存在的.

---

*) 原书误为 "$E_k\subset E_{k+1}$".——译者注

在第 1 章内，我们已知道如果 f 是在一个开集 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上全纯，则 $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}=0$，$j=1,\cdots,n$. Hartogs 的一个著名的定理是证明其逆. 这能袛叙之如下.

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个开集且 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{C}$. 用 $\Omega_{j,a}$ 表示 $\mathbf{C}$ 内的开集 $\{z\in\mathbf{C}|(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n)\in\Omega\}$. 对 Ω 上任一函数 f，用 $f_{j,a}$ 表示在 $\Omega_{j,a}$ 上定义的函数

$$f_{j,a}(z)=f(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n).$$

对每个变量分别解析的 Hartogs 定理

Hartogs 定理 设 f 是在 Ω 上所定义的一个函数，而且对任意的 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{C}$ 和任意的 j，$1\leqslant j\leqslant n$，函数 $f_{j,a}$ 是在 $\Omega_{j,a}$ 上全纯的，则 f 是在 Ω 上全纯.

显然只要假设 $\Omega=\{z\in\mathbf{C}^n||z_j|<R\}$，$R>0$. 此定理之证明需要几个预备命题.

引理 3 假设 Ω 是上面所定义的多圆柱和 f 满足 Hartogs 定理的条件. 再假设 f 是在 Ω 上有界，则 f 是在 Ω 上全纯的.

证 我们注意到 f 在圆周 $|\zeta_j|=\rho$，$\rho<R$ 的拓扑积上是可测的. 当 $n=1$ 时，f 是连续的，因此可测. 假定已对 $n-1$ 维时证明 f 是可测的，设 $\theta_1,\cdots,\theta_j$，是圆周上的分点，而且 $\theta_1=\theta_p$，而且 $\theta_j\theta_{j+1}$ 之弧长 $<\varepsilon$，则函数

$f_\varepsilon(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)=f(\theta_j,\zeta_2,\cdots\zeta_n)$ 当 ζ_1 在弧 $\theta_j\theta_{j+1}$ 之内

（这里 $\theta_j\theta_{j+1}$ 表示右端是开的，左端是闭的弧），对固定的 $\zeta_2,\cdots,\zeta_n$，f 是 ζ_1 的连续函数，故 f_ε 在每点均收敛于 $f(\zeta)$. 由归纳假设 f_ε 是可测的，因此 f 亦是.

假设 $|f(z)|\leqslant M$. 设 $0<\rho<R$. 将第 1 章命题 2 应用到 $n=1$ 的情况，当 $|z_j|<R$ $j=1,\cdots,n-1$ 和 $|z_n|<\rho$ 时，我们有，

$$f(z_1,\cdots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=\rho}\frac{f(z_1,\cdots,z_{n-1},\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n.$$

对固定的 $z_1,\cdots,z_{n-1}$，$f(z_1,\cdots,z_{n-1},\zeta_n)$ 是在圆盘内全纯，我

们可以重复这个过程，对 $|z_j| < \rho \; j=1, \cdots n$，得到

$$f(z_1, \cdots, z_n) = (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_n|=\rho} d\zeta_n \cdots \int_{|\zeta_1|=\rho} \frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{\Pi(\zeta_j - z_j)} d\zeta_1,$$

这里的积分是一个逐次积分．现对 $|z_j| \leqslant r < \rho$ 和 $|\zeta_j| = \rho$，有

$$\Pi(\zeta_j - z_j)^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{z^\alpha}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}},$$

这级数对 $|\zeta_j| = \rho$ 和 $|z_j| \leqslant r < \rho$ 是一个一致收敛级数． 因为 f 是有界和可测的，可以在这个级数上乘上 f，然后逐项积分．对 $|z_j| \leqslant r < \rho$，得到

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha z^\alpha,$$

$$c_\alpha = (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_n|=\rho} d\zeta_n \cdots \int_{|\zeta_1|=\rho} (f(\zeta) \Pi \zeta_j^{-\alpha_j-1}) d\zeta_1;$$

而且 $|c_\alpha| \leqslant M\rho^{-|\alpha|}$．因此对 $|z_j| \leqslant r$ 上面级数一致收敛到 f；故得到引理．

引理 4 (Baire 定理) 设 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集，$\{W_p\}_{p=1,2\cdots}$ 是 W 的开稠子集的序列，则 $A = \bigcap_{p=1}^{\infty} W_i$ 是在 W 中稠的．

证 设 $U_0 \subset W$ 是一个非空开子集，$V_0 \Subset U_0$ 且 V_0 依旧是一个非空开集，则 $U_1 = V_0 \cap W_1$ 仍是一个非空开集，因为 W_1 是一个稠开集，设 V_1 是一个适合 $V_1 \Subset U_1$ 的非空开集．对 p 进行归纳，设 $U_p = V_{p-1} \cap W_p$ 和 V_p 是 U_p 的非空开子集而且 $V_p \Subset U_p$，则 $\overline{V}_p \subset V_{p-1}$，因此 $\cap V_p = \cap \overline{V}_p$．由于每个 $\overline{V}_p$ 是一个非空紧致集和 $\overline{V}_p \subset \overline{V}_{p-1}$，故有 $\cap V_p \neq \varnothing$．显然，$\cap V_p \subset (\cap W_p) \cap U_0$．由于 U^0 是任一开集，故 A 是在 W 中稠的．

注 此定理对 W 是任一完备度量空间都成立．只要在上述证明中代替条件 $V_p \Subset U_p$ 为 $\overline{V}_p \subset U_p$ 与 V_p 的直径趋于 0．

引理 5 设 $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_j| < R\}$，设 $\rho < R$ 和 f 是一个定义在 Ω 上的函数且满足 Hartogs 定理的条件． 假设对固定的 a_n，$|a_n| < R$，函数 $(z_1, \cdots, z_{n-1}) \longmapsto f(z_1, \cdots, z_{n-1}, a_n)$ 是在

$|z_j| < R\ j = 1, \cdots, n-1$, 全纯并令

$$M(z') = \sup_{|a_n| \leqslant \rho} |f(z_1, \cdots, z_{n-1}, a_n)|, \quad z' = (z_1, \cdots, z_{n-1}),$$

则有一个开稠集 $U' \subset \Omega'$, $\Omega' = \{z' \in \mathbf{C}^{n-1} \mid |z_j| < R, j = 1, \cdots, n-1\}$ 使 $M(z')$ 是对 U' 的任一紧致子集上有界的.

证 设 V' 是 Ω' 的任一非空开子集,设

$$V'_k = \{z' \in V' \mid M(z') \leqslant k\}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

则 $\cup V'_k = V'$ 和 V'_k 是在 V' 内闭的: 对每个 a_n, $|a_n| \leqslant \rho$, 集

$$\{z' \in V' \mid |f(z', a_n)| \leqslant K\}$$

是在 V' 闭的, 因为 $z' \mapsto f(z', a_n)$ 由假定是全纯的; V'_k 是当 a_n 遍历所有 $|a_n| \leqslant \rho$ 的闭圆盘时,形如上面那样的闭集之交. 因此 $\cap(V' - V'_k) = \varnothing$. 由引理 4 ,至少有一个 $V' - V'_k$ 不是稠的,所以 V'_{k_0}(某个 k_0) 包含有非空开集 W'. 显然 $M(z') \leqslant k_0, \forall z' \in W'$. 考虑 $U' = \cup W'$, 这里求和是对 V' 遍历 Ω' 中所有非空开子集时的所有 W' 所作的. 现在 U' 与每个 V' 有交, 所以是在 Ω' 中稠的. 而 U' 的任一紧致子集 K' 一定包含在有限个这样的 W' 的并集之中,所以对 $z' \in K'$, $M(z')$ 是有界的. 现证明 Hartogs 定理.

Hartogs 定理的证明 当 $n = 1$ 时, 定理是显然的. 今归纳假定定理对 $\mathbf{C}^{n-1}$ 内的开集已被证明. 设 $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_j| < R\} = \Omega' \times D$, 这里 $\Omega' = \{z' \in \mathbf{C}^{n-1} \mid |z_j| < R, j = 1, \cdots, n-1\}$, $D = \{z_n \in \mathbf{C} \mid |z_n| < R\}$. 设 $\rho < R$, $\delta < R - \rho$ 并且 U' 是 Ω' 的开稠子集,使 f 在 $K' \times K_\rho$ 上是有界的, $K_\rho = \{z_n \in \mathbf{C} \mid |z_n| \leqslant \rho\}$ 和 K' 是 U' 内之任一紧致集 (引理 5). 设 $a' \in U'$, $|a'| < \delta$, 则 f 是在集 $D' \times D_n$ 上全纯和有界,这里 $D_n = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \rho\}$ 和 $D' = \{z' \in C^{n-1} \mid |z' - a'| < \eta\}$ 当 η 充分小时(引理 3). 因此

$$\text{(S)} \quad f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}} a_\alpha(z_n)(z_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z_{n-1} - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}},$$

是在 $\alpha \times D_n$ 的紧致子集上一致收敛, 而且 $a_\alpha(z_n)$ 是 D_n 上全纯的. 由 Cauchy 不等式(第 1 章,命题 3),

$$|a_\alpha(z_n)| \leqslant M\eta^{-|\alpha|}, \quad M = \sup_{z \in D' \times D_n} |f(z)|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^{n-1}.$$

另一方面,对 $|z_n|<R$, 函数 $(z_1,\cdots,z_{n-1})\to f(z)$ 是在 Ω' 上全纯,所以级数 (S) 是在 $\{z'\in\mathbf{C}^{n-1}\,|\,|z_j|<R-\delta\}$的每个紧致子集上一致收敛的. 因此,特别对每个 z_n, 存在 $A(z_n)>0$ 使

$$|a_\alpha(z_n)|\leqslant A(z_n)\rho^{-|\alpha|},\qquad \forall\,\alpha\in\mathbf{N}^{n-1} \text{ 从 } \rho<R-\delta.$$

从这样两个关系,我们得到

(a) $|a_\alpha(z_n)|^{1/|\alpha|}$ 是有界的, $\forall\, z_n\in D_n,\ \alpha\in N^{n-1}$,

(b) $\overline{\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}}|a_\alpha(z_n)|^{1/|\alpha|}\leqslant\dfrac{1}{\rho}\qquad \forall\, z_n\in D_n$,

因此,由命题 7, 当 $\varepsilon>0$ 和 $r<\rho$ 存在 $k_0>0$, 使

$$|a_\alpha(z_n)|\leqslant(\rho^{-1}+\varepsilon)^{|\alpha|}\qquad \text{对 } |z_n|\leqslant r \text{ 和 } |\alpha|\geqslant k_0 \text{ 成立.}$$

因此级数(s)在 $|z_1|\leqslant\dfrac{\rho}{1+2\varepsilon\rho},\cdots,|z_{n-1}|\leqslant|\dfrac{\rho}{1+2\varepsilon\rho},|z_n|\leqslant r$ 上是一致收敛的. 从 $\varepsilon>0$ 是任意的和 $r<\rho$ 亦是任意的, 由 Weierstrass 定理(第 1 章命题 5), f 在

$$\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z_1|<\rho,\cdots,|z_n|<\rho\}$$

是全纯的. 定理证毕.

次调和函数的例外集

以下证明的关于次调和函数的命题,将在第 4 章用到它.

命题 8 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 内的一个连通开集和 s 是在 Ω 上的一个次调和函数*). 设 $A=\{x\in\Omega\,|\,s(x)=-\infty\}$ 和假定 A 是闭的.如果 u 是 Ω 上的一个连续函数,且在 $\Omega-A$ 上次调和,则 u 是在 Ω 上次调和的.

证 从 s 是在 Ω 的紧致子集上有上界, 故可用 $s-c$ 来代替 s (这里 c 是一个常数),这样无妨假定 $s\leqslant 0$ 在 Ω 上成立. 设 $\varepsilon>0$, 则 $u+\varepsilon s$ 是在 Ω 上次调和的. 事实上 A 的点显然满足命题 4 的条件 (*) (在这些点 $u+\varepsilon s=-\infty$) 而在 A 之外, 因为 $u+\varepsilon s$ 是在 $\Omega-A$ 上次调和,故(*)也满足. 如果 $a\in\Omega$ 和

*) 原书此处还加有 $\not\equiv-\infty$ 的条件, 由次调和函数的定义已蕴涵此点, 故译文中略去.——译者注

$$\{z \mid |z-a| \leqslant R\} \subset \Omega,$$

且 $h(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,R}(z,\theta) u(a+Re^{i\theta}) d\theta$,则由命题 3, $u+\varepsilon s \leqslant h$ 对 $|z-a|=R$ 成立（因为 $s \leqslant 0$）. 因此在 $|z-a| \leqslant R$ 有 $u+\varepsilon s \leqslant h$ 令 $\varepsilon \to 0$, 得到当 $|z-a| \leqslant R$, $z \bar{\in} A$ 有

$$u(z) \leqslant h(z).$$

但是由引理 2 之 (a), $\Omega - A$ 是在 Ω 稠的，从 u 和 h 都是连续的，故推知对 $|z-a| \leqslant R$ 有

$$u(z) \leqslant h(z).$$

所以 u 是次调和的.

系 如果 s, A 同命题 8 之假设，u 在 Ω 上是连续的和在 $\Omega - A$ 上是调和的，则 u 在 Ω 上是调和的.

我们可以假定 u 是实值的，然后应用命题 8 于 u 和 $-u$ 就得此系.

命题 9 设 Ω, s 和 A 都如命题 8 所假设. 如果 u 是一个在 $\Omega - A$ 上有界连续次调和函数，则有一个 Ω 上的次调和函数 V 使 $V|\Omega - A = u$.

证 在 A 上定义 V 为

$$V(a) = \overline{\lim_{z \to a,\, z \bar{\in} A}}\, u(z), \qquad a \in A,$$

在 $z \in \Omega - A$ 时，定义 $V(z) = u(z)$. 设 $R > 0$ 而且

$$\{z \mid |z-a| < R\} \subset \Omega.$$

由引理 2 之 (b) 集合 $\{\theta \in [0, 2\pi] \mid s(a+Re^{i\theta}) = -\infty\}$ 是测度为 0 .定义 h 为

$$h(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,R}(z,\theta) u(a+Re^{i\theta}) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} P_{a,R}(z,\theta) V(a+Re^{i\theta}) d\theta.$$

则如同命题 8 的证明，h 是在 $|z-a| < R$ 内调和且 $V - h + \varepsilon s$ 是在 $|z-a| < R$ 内次调和的. 因为如果 $|\zeta - a| = R$，则

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}}\, (V - h + \varepsilon s) \leqslant 0,$$

这推出 $V-h+\varepsilon s\leqslant 0$ 在 $|z-a|<R$ 成立．因此令 $\varepsilon\to 0$，对 $|z-a|<R$，$z\bar{\in} A$，我们有

$$u(z)\leqslant h(z).$$

从 V 的定义得到 $V(z)\leqslant h(z)$，$|z-a|<R$，因此 V 是次调和的．

系 设 s，A 之定义如上命题，则任一在 $\Omega-A$ 上的有界调和函数有一个唯一的在 Ω 上的调和扩充．

这些结果只是位势理论中已知的非常多的完美的结果的一些特殊情况．对次调和函数理论，可见之于[25]，Hartogs 定理在[13]中被证明，亦可见之于[17]，那是这个定理最早的证明．

我们已经把次调和函数理论介绍到这一步，使得 Radó 定理(第 4 章定理1)和第 5 章所需要的一个推广(第 5 章内定理 2 的证明)变得较为显然．

第 4 章

全纯函数奇点的 Hartogs 定理

解析集

本章的主题是证明 Hartogs 给出的一个定理，大意是说一个全纯函数的奇异点集是一解析集.

定义 1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个开集和 $A\subset\Omega$. 我们称 A 是一个解析集，如果对每个 $a\in\Omega$，存在 a 的一个邻域 U 和有限多个 U 上的全纯函数 $f_1,\cdots,f_p$，使得 $A\cap U=\{f_1(z)=\cdots=f_p(z)=0\}$.

命题 1 设 Ω 是连通的，A 是 Ω 内的一个解析子集，则有

(i) A 是在 Ω 内闭的.

(ii) 如果 $A\neq\Omega$，$\Omega-A$ 是在 Ω 内稠的.

(iii) $\Omega-A$ 是连通的.

证 (i) 由定义，$\forall\, a\in\Omega$ 有一个邻域 U，使 $U\cap A$ 是在 U 内闭的. 这表明 A 是闭的.

(ii) 假如 (ii) 不成立，则 $B=\mathring{A}\neq\varnothing$. 我们将证明 B 是 Ω 内的闭集，从 B 是开的，Ω 是连通的，得出 $A=\Omega$，与原设矛盾.

设 $a\in\bar{B}$，U 是在 Ω 内的 a 的一个连通开邻域，设 $f,\cdots,f_p$ 是在 U 内全纯*)，且 $A\cap U=\{x\in U\,|\,f_1(x)=\cdots=f_p(x)=0\}$，则每个 f_i 在 $B\cap U$ 上恒为零. 因此由解析开拓原理，在 U 上，每个 $f_i=0$. 所以 $U\subset A$；因而 $U\subset\mathring{A}=B$；特别地，$a\in B$，故 $B=\bar{B}$.

(iii) 只要证明下面的(*)就足够了.

(*) 任一 $a\in\Omega$，有一连通邻域 U，使 $U-A$ 是连通的.

事实上如果(*)已成立，而 $\Omega-A=U_1\cup U_2$，此处 U_i 都是开、非空集，且 U_1 与 U_2 没有交. 由 (ii)，$\Omega=\overline{\Omega-A}=\bar{U}_1\cup\bar{U}_2$.

---

*) 原书误印为"设 $f_1,\cdots,f_p$ 在 Ω 内全纯". ——译者注

从 Ω 是连通的得 $\overline{U}_1\cap\overline{U}_2\neq\varnothing$. 设 U 是 a 的一个邻域, 且 $U-A$ 是连通的, 则 $U-A=(U\cap U_1-A)\cup(U\cap U_2-A)$ 不可能是连通的,除非 $U\cap U_1$ 或 $U\cap U_2$ 中,有一个包含于 A, 由 (ii), 这是不可能的*).

证明 (*), 设 U 是 a 的一个凸邻域, 且存在 U 内全纯函数 $f_1,\cdots,f_p$, 使 $U\cap A=\{x\in U\,|\,f_1(x)=\cdots=f_p(x)=0\}$. 设 x_0, $x_1\in U-A$, $V=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\lambda x_0+(1-\lambda)x_1\in U\}$, 则 V 是 $\mathbf{C}$ 内的凸集和在 V 上至少有一个

$$g_i(\lambda)=f_i(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)\not\equiv 0.$$

因此

$$A'=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\lambda x_0+(1-\lambda)x_1\in U\cap A\}$$

Riemann 开拓定理

是在 V 内离散的. 故 $V-A'$ 是连通的, 且 $0,1\in V-A'$. 如果 $t\longmapsto\gamma(t)$ 是 $V-A'$ 内连接 0 到 1 的弧,则

$$t\longmapsto\gamma(t)x_0+(1-\gamma(t))x_1$$

是 $U-A$ 内连接 x_1 到 x_0 的弧.

Riemann 开拓定理

命题 2 (Riemann 开拓定理) 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个开集和 A 是一个解析集,使得 $\Omega-A$ 是在 Ω 内稠的. 设函数 f 是在 $\Omega-A$ 上全纯和对 $\forall a\in A$, 存在一个在 Ω 内的 a 的邻域 U, 使 $f|U-A$ 是有界的. 则存在一个唯一的 Ω 上的全纯函数 F, 适合 $F|\Omega-A=f$.

证 唯一性是显然的.

首先对 $n=1$ 证明本定理. 我们只需证明 f 是在 $\{0<|z|<\rho\}$ 内全纯且有界的情况, 此时 f 是在圆盘 $\{|z|<\rho\}$ 内连续. 现在

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu z^\nu,\qquad a_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}f(z)z^{-\nu-1},$$

对任一 $0<r<\rho$.

---

*) 这一段中之 $U\cap U_1$ 和 $U\cap U_2$, 在原书中误为 "U_1 和 U_2".——译者注

对 $v<0$，因为 f 是有界的，当 $r\to 0$，上面的积分 $\to 0$. 由于 a_v 是与 r 无关的，故当 $v<0$，有 $a_v=0$. 由此定理得证.

对一般的情况，设 $a\in A$，V 是 a 的一个连通邻域，$f|V-A$ 是全纯且有界，在 V 上存在有全纯函数 $f_1,\cdots,f_p$ 使得

$$A\cap V=\{x\in V|f_1(x)=\cdots=f_p(x)=0\}.$$

今无妨假设 $h=f_1\not\equiv 0$. 在 $\mathbf{C}^n$ 内作一个座标的线性变换后，可假设 $a=0$ 和在 $z_n=0$ 的一个邻域内 $h(0,\cdots,0,z_n)\not\equiv 0$，则存在有 $\delta>0$，当 $0<|z_n|\leqslant\delta$ 时，有 $h(0,\cdots,0,z_n)\neq 0$，今用 z' 表示 $(z_1,\cdots,z_{n-1})$，设 $\varepsilon>0$，使对 $|z'|\leqslant\varepsilon$ 和 $|z_n|=\delta$，有 $h(z',z_n)\neq 0$. 今考虑函数

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\delta}\frac{f(z',t)}{t-z_n}dt;$$

注意，对 $|z'|\leqslant\varepsilon$，$|t|=\delta$，有点 $(z',t)\in V-A$，所以 g 是在 $|z'|<\varepsilon$，$|z_n|<\delta$，内全纯（按照第 1 章命题 2 的系 2）. 进一步，对固定的 z'；$|z'|<\varepsilon$，函数 $t\mapsto f(z',t)$ 允许有一个在圆盘 $|t|<\delta$ 上的全纯扩充，这是由于定理在 $n=1$ 的情况(因为对 $|z_n|=\delta$ 有 $h(z',z_n)\neq 0$，所以 $z_n\mapsto h(z',z_n)$ 在 $|z_n|<\delta$ 内只有有限多个零点). 因此对 $z\in V-A$，$|z'|<\varepsilon$，$|z_n|<\delta$ 由 Cauchy 公式得

$$g(z)=f(z).$$

故而 f 可连续扩充于 A 的任一点的某个邻域内，现在由扩充的唯一性推得命题.

Radó 定理

定理 1（Radó 定理） 设 U，Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内两个开集，且 $U\subset\Omega$，设 f 在 U 内全纯. 假如对每个点 $a\in(\partial U)\cap\Omega$，有

$$\lim_{z\to a,\ z\in U}f(z)=0.$$

定义

$$F(z)=\begin{cases}f(z) & \text{当 } z\in U \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } z\in\Omega-U \text{ 时},\end{cases}$$

则 $F(z)$ 是在 Ω 内全纯的.

此定理等价于下面的定理

定理 1′ 设 f 是在开集 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上的连续函数，设

$$U = \{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0\}.$$

假设 f 是在 U 上全纯，则 f 必在 Ω 上全纯．

定理 1 ⇒ 定理 1′．如同定理 1′ 给定 f，则在定理 1 中，定义的 F 就等于 f．

定理 1′ ⇒ 定理 1． 只要验证当 U 上给定的 f，在 $(\partial U) \cap \Omega$ 上趋于 0 时，定理 1 中所定义的 F 是连续的就足够了． 这点是显然的．

定理 1′ 的证明 只要对 $n = 1$ 证明定理就够了． 因为假定定理当 $n = 1$ 时成立，今考虑 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{C}$，则函数 $z_j \longmapsto f(a_1, \cdots, a_{j-1}, z_j, a_j, \cdots, a_n)$ 在 $\mathbf{C}$ 的开集内满足定理 1′ 的条件，所以它是全纯的．因此，由第 3 章之引理 3，f 是在 Ω 上全纯．

由于此定理是局部的，故可以假定 Ω 是 $\mathbf{C}^1$ 内连通的． 进一步假设 $f \not\equiv 0$． 令 $s(z) = \log|f(z)|$，则 s 是在 Ω 内次调和的： 第 3 章命题 4 的条件(*)在

$$A = \{z \in \Omega \mid F(z) = 0\} = \{z \in \Omega \mid s(z) = -\infty\}$$

的点显然满足． 在 $\Omega - A$ 上，s 是调和的，且条件(*)亦是满足的．进一步 $f|\Omega - A$ 是全纯的，因此亦是调和的，由第 3 章命题 8 的系，f 是在 Ω 上调和的，特别地 f 是在 Ω 上连续可证的． 由于在 $\Omega - A$ 上 $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$，而且 $\Omega - A$ 是在 Ω 中稠的（第 3 章引理 2 之 (a)），可以在 Ω 上有 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$，故 f 在 Ω 上全纯．

上面证明的思想是 H. Cartan [9] 给出的． 不利用次调和函数的结果，而应用第 3 章的命题 3 和必须的第 3 章命题 8 的特殊情况来直接证明此定理亦是不难的，这点是 E. Heinz [15] 指出的．

定义 2 (a) 定义在子集 $S \subset \mathbf{C}^n$ 上的一个函数称为是在 S 上全纯的，如果它是一个在开集 $U \supset S$ 上的全纯函数在 S 上的限制．

(b) 设Ω是开集，$A\subset\Omega$. 如果f是在$\Omega-A$上全纯，我们说f在点$a\in A$是奇异的，如果不存在一个在a的某个邻域U上的全纯函数，它在$U-A$上的限制就是$f|U-A$.

这些定义不是最可采用的，但我们简单地给出是便于叙述本章的主要定理.

Hartogs 连续性定理

定理 2 (Hartogs 连续性定理) 设Ω是C^n内的一个连通开集，$Q=\{w\in C|r<|w|<R\}$，$0\leqslant r<R$. 设f是在$\Omega\times Q$上全纯. 假设有一点$a\in\Omega$，使f能全纯地拓展到$\{a\}\times D$的一个邻域，此处$D=\{w||w|<R\}$，则f能全纯地拓展于$\Omega\times D$.

证 设$f(z,w)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_\nu(z)w^\nu$是$f$的 Laurent 展开，它是在$\Omega\times Q$的紧致子集上一致收敛的. $a_\nu(z)$都是Ω上的全纯函数. 现在如果对$r<\rho<R$，有一个$\varepsilon>0$，使得$f(z,w)$能在$\{|z-a|<\varepsilon,|w|<\rho\}$上扩充为一个全纯函数$F(z,w)$(因为$f$能在$\{a\}\times D$的一个邻域内全纯开拓). 因此当$\nu<0$时，$a_\nu=0$在$|z-a|<\varepsilon$内成立. 由解析开拓原理，当$\nu<0$时$a_\nu=0$在$\Omega$上成立. 所以

$$f(z,w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z)w^\nu,\quad (z,w)\in\Omega\times Q.$$

上式右边的级数在$\Omega\times D$的紧致子集上是一致收敛的，定理证毕.

系 设f是在$C^n\times C$内的集合$z=0,0<|w|<R$上全纯的. 假设$(0,0)$是f的奇异点. 设$\delta>0$是充分小的实数，则存在$\varepsilon>0$，使对任一z_0，$|z_0|<\varepsilon$，f不能在$\{z_0\}\times D$的任一邻域内全纯扩充，此处$D=\{|w|<\delta\}$.

证 设$\varepsilon>0$的选取使得f是在集合$|z|<\varepsilon$，$r_0<|w|<r_1$；$r_0,r_1<\delta$上全纯的，则由定理 2 立刻推得此系.

下面的主要定理亦是 Hartogs 给出的.

定理 3 设Ω是C^n内的一个连通开集和$\varphi:\Omega\to C$是一个映照. 假设对所有的$z\in\Omega$，均有$|\varphi(z)|<R$与令$U=\Omega\times D$,

$D=\{w\in \mathbf{C}\,|\,|w|<R\}$. 设 $\Gamma=\{(z,w)\in U\,|\,\varphi(z)=w\}$. 如果 f 是在 $U-\Gamma$ 上全纯,在 Γ 的每点上都是奇异的,则 φ 是 z 的全纯函数.

证明此定理需要几个预备的结果.

引理 1 设 Ω, φ, f, R, D 如定理 3 中所述,则 φ 是连续的.

证 设 $z_0\in\Omega$, $\varphi(z_0)=w_0$. 设 $\varepsilon>0$, 由定理 2 的系, 有 $\delta>0$, 使对 $|z-z_0|<\delta$, f 不能全纯地扩充到 $\{z\}\times\{|w-w_0|<\varepsilon\}$, 而对 $|z-z_0|<\delta$, f 是在 $\{z\}\times(D-\{\varphi(z)\})$ 上是全纯的,这推出 $|\varphi(z)-w_0|<\varepsilon$, 故 φ 是连续的.

设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 内的一个开集而 $\{f_\nu\}$, $\nu=0, 1, \cdots$ 是 Ω 上的全纯函数列. 今考虑级数

$$\text{(H)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)w^\nu,$$

且假定此级数是在 $\Omega\times\{0\}$ 的一个邻域内的紧致子集上一致收敛的.

Hartogs 半径的性质

定义 上面级数的 Hartogs 半径是函数 $R:\Omega\to\mathbf{R}^+$, 其定义为

$$R(z_0)=\sup\{|w|\,|\,\sum_0^\infty f_\nu(z)w^\nu \text{ 在 } (z_0, w) \text{ 的邻域内一致收敛.}\}$$

从级数在 $\Omega\times\{0\}$ 的一个邻域内一致收敛, 明显地有 $R(z_0)>0$ 对所有 $z_0\in\Omega$ 成立.

命题 3 如 $R(z)\not\equiv+\infty$, 函数 $-\log R(z)$ 在 Ω 内次调和.

证 先说明 $-\log R(z)$ 是上半连续的. 设 $r<R(z_0)$, 则有 $\delta>0$, 使级数在集 $|z-z_0|\leqslant\delta$, $|w|=r$ 的一个邻域上是一致收敛的, 因此亦在 $|z-z_0|\leqslant\delta$, $|w|\leqslant r$ 上一致收敛. 特别地当 $|z-z_0|<\delta$ 时有 $R(z)\geqslant r$, 故有 $\varliminf\limits_{z\to z_0} R(z)\geqslant R(z_0)$.

设 $K=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z-z_0|\leqslant\rho\}\subset\Omega$. 设 h 是在 K 上连续,在 $\mathring{K}$ 上调和. 假设对 $|z-z_0|=\rho$ 时,有

$$\text{(I)} \qquad -\log R(z)\leqslant h(z).$$

我们要说明 (I) 对 $|z-z_0|<\rho$ 的 z 亦成立. 从级数 (H) 对 $|z-z_0|=\rho$, $|w|<R(z)$ 收敛,我们对 $|z-z_0|=\rho$, 有

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}|f_\nu(z)|^{1/\nu}\leqslant\frac{1}{R(z)}\leqslant e^{h(z)}.$$

另一方面 $R(z)$ 是在K上有下界的,因此 (H) 在型为$K\times\{|w|\leqslant\eta\}$; $\eta>0$ 的集上是一致收敛的. 特别地有

$$|f_\nu(z)|\eta^\nu\leqslant M,\qquad\forall z\in K,\qquad\forall\nu=0,1,2,\cdots,$$

这里M是一正常数. 因此由第 3 章命题 7 后的注,我们有

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\alpha_\nu(r)\leqslant 0,$$

这里

$$\alpha_\nu(r)=\sup_{|z-z_0|\leqslant r}\left\{\frac{1}{\nu}\log|f_\nu(z)|-h(z)\right\};\ 0<r<\rho.$$

因此,对 $\varepsilon>0$, $|f_\nu(z)|^{1/\nu}\leqslant e^{h(z)+\varepsilon}$ 对 $|z-z_0|\leqslant r$ 和$\nu>\nu_0(\varepsilon)$ 一致地成立. 故当 $|z-z_0|<\rho$, $|w|<e^{-h(z)-\varepsilon}$ 时级数 (H) 在 (z,w) 的邻域内一致收敛,所以 $R(z)\geqslant e^{-h(z)}$ 当 $|z-z_0|<\rho$ 成立,此即证明 (I).

我们现在转回来证明 $n=1$ 时的定理 3. 现无妨假定 $0\in\Omega\subset\mathbf{C}$ 和 $\varphi(0)=0$. 我们必须说明φ是在 $z=0$ 的邻域内全纯的. 设 $\frac{R}{2}>\eta>0$ 和当 $|z|<\delta$ 时 $|\varphi(z)|<\eta$ (引理 1). 设 $w_0\in\mathbf{C}$, $\eta<|w_0|<R-\eta$, 则当 $|z|<\delta$, f 是在 (z,w_0) 的一个邻域内全纯. 设

$$(\mathrm{H}_0)\qquad f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z)(w-w_0)^k.$$

当 $|w-w_0|<|\varphi(z)-w_0|$ 时,上面的级数在 (z,w) 的一个邻域内一致收敛的, 因为对这样的 (z,w), f 是在它的一个邻域内全纯(注意 $|w_0|<R-\eta$, 所以 $|\varphi(z)-w_0|<R$). 因此, 对这个级数的 Hartogs 半径 $R(z)$, 适合不等式

$$R(z)\geqslant|\varphi(z)-w_0|.$$

另一方面，如果有某个 z_0; $|z_0|<\delta$，使 $R(z_0)>|\varphi(z_0)-w_0|$. 从 $R(z)$ 是下半连续的*)，我们将有 $R(z)>\rho$，对所有 z_0 邻近的 z 成立，这里 ρ 是一个适合 $|\varphi(z_0)-w_0|<\rho<R(z_0)$ 的数. 这将表明对 z_0 邻近的 z 和 $|w-w_0|<\rho$**)，上面的级数一致收敛；从 $|\varphi(z_0)-w_0|<\rho$，f 在 $(z_0, \varphi(z_0))$ 的一个邻域内将有一个解析扩充，但由原来的假设 f 在 Γ 上是奇异的，这是不可能的. 因此我们有

引理 2 当 $|z|<\delta$ 时，级数 (H_0) 的 Hartogs 半径是

$$R(z)=|\varphi(z)-w_0|.$$

命题 4 如果 δ, η 和 φ 定义如上，函数

$$z\longmapsto \log|\varphi(z)-w_0|$$

是在 $|z|<\delta$ 内调和，对任一 w_0，它满足 $\eta<|w_0|<R-\eta$.

证 设 $u(z, w_0)=-\log|\varphi(z)-w_0|$. 由命题 3 和引理 2，$u(z, w_0)$ 是在 $|z|<\delta$ 内的对 z 次调和的函数. 因此对 $\rho<\delta-|z|$，有

$$\text{(II)}\qquad u(z, w_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+\rho e^{i\theta}, w_0)d\theta.$$

对固定的 r; $\eta<r<R-\eta$，令 $w_0=re^{i\varphi}$ 代入上不等式，对 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，我们有 (II) 成立. 现在将 u 对 φ 从 0 到 2π 积分. 对 $|\zeta|<\delta$，由于 $|\varphi(\zeta)|<\eta$ 和当 $|\alpha|<r$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\log|\alpha-re^{i\varphi}|d\varphi=2\pi\log r$$

(要证明此等式，只要注意到 $\log|\alpha-re^{i\varphi}|=\log|\alpha e^{-i\varphi}-r|=\log|\bar{\alpha}e^{i\varphi}-r|$ 和 $\log(z-r)$ 是在 $|z|<r$ 内全纯的，所以我们能用第 3 章命题 3 之系 1)，故现在有

$$\int_0^{2\pi}u(\zeta, re^{i\varphi})d\varphi=-\int_0^{2\pi}\log|\varphi(\zeta)-re^{i\varphi}|d\varphi=2\pi\log\frac{1}{r}.$$

这就给出

---

*) 原书误为"$R(z)$ 是半连续的". ——译者注

**) 原书误为"$|w|<\rho$."——译者注

$$\int_0^{2\pi} u(z, re^{i\varphi})d\varphi = 2\pi\log\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta}, re^{i\varphi})d\theta,$$

因为 u 是连续的,故从上面的等式和 (II),必得到

$$u(z,w_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta}, w_0)d\theta; \text{ 当 } \eta < |w_0| < R-\eta,$$

$$\rho < \delta - |z|.$$

由第 3 章命题 4 的系 7,这就证明了本命题.

引理 3 如果 $\log|\varphi(z)-w|$ 是对所有的 w; $\eta < |w| < R-\eta$. 都是 z 的调和函数,则 φ 或 $\bar{\varphi}$ 是 z 的全纯函数.

证 因为 $\log|\varphi(z)-w|$ 是调和的,故它是实解析函数,因此是 C^∞ 的;所以当 $w = re^{i\lambda}$, $\eta < r < R-\eta$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$ 时, $|\varphi(z)-w|^2 = \exp(2\log|\varphi(z)-w|)$ 也是 C^∞ 的,因此

$$\bar{w}\varphi + w\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(|\varphi(z)+w|^2 - |\varphi(z)-w|^2)$$

是 C^∞ 的. 今取 $w = r$ 与 $w = ir$, 我们得到 $\varphi+\bar{\varphi}$ 和 $\varphi-\bar{\varphi}$ 是 C^∞ 的, 也即 φ, $\bar{\varphi}$ 都是 C^∞ 的*).

要证明我们所要的结果,现在必须要说明 $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ 或 $\partial\bar{\varphi}/\partial\bar{z}$ 是恒等于 0. 现有

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log\{(\varphi(z)-w)(\varphi(\bar{z})-\bar{w})\}$$

$$= (\varphi-w)^{-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} - (\varphi-w)^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$$

$$+ (\bar{\varphi}-\bar{w})^{-1}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z\partial\bar{z}} - (\bar{\varphi}-\bar{w})^{-2}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}},$$

对所有在一个非空开集的 w 成立. 上式乘以 $(\varphi-w)^2(\bar{\varphi}-\bar{w})^2$, 然后按 w 和 $\bar{w}$ 的幂次列出方程,则得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = 0.$$

---

*) 原书这一段证明中有些小错误. 译者已改正. ——译者注

第一个关系式表明 φ 是调和的，因而亦是实解析的，第二个关系式表示或是 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 或是 $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$ 在一个非空开集上恒为零．因此由解析展拓原理，或是 $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$，或是 $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}}=\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}$ 恒等于 0，引理证完．

系 在定理 3 的条件下，当 $n=1$ 时，φ 或 $\bar{\varphi}$ 是全纯的．

当 $n=1$ 时，定理 3 的证明 令 $\omega=w+z$，$\zeta=z$，则当 $|\zeta|$，$|w|$ 充分小时，集合 $\{(\zeta,\omega)|\omega=\varphi(\zeta)+\zeta\}$ 关于函数 $f(\zeta,\omega-\zeta)$ 满足定理 3，当 $n=1$ 时的假设． 因此由上面的系，在 $\zeta=0$ 的一个充分小邻域内，$\varphi(\zeta)$ 或 $\overline{\varphi(\zeta)}+\bar{\zeta}$ 是全纯的．如果 φ 不是全纯的，则 $\bar{\varphi}(\zeta)$ 和 $\bar{\varphi}(\zeta)+\bar{\zeta}$ 都是全纯的，因此 $\bar{\zeta}$ 亦是全纯的，这是荒谬的．所以 φ 是在 0 全纯的，定理被证明．

一般情况的定理 3 的证明 设 $a\in\Omega$ 和 P 是以 a 为心的充分小的多圆柱，且 $P\subset\Omega$．设 $z_0\in P$，我们将证明函数 $\lambda\longmapsto\varphi(a+\lambda(z_0-a))$ 是在凸集 $D=\{\lambda\in\mathbf{C}|a+\lambda(z_0-a)\in P\}$ 上全纯的．因为全纯函数的极限还是全纯的，所以只要证明 z_0 是在 P 的一个稠子集 S 上证明此点就够了． 今无妨假定 $a=0$，$\varphi(0)=0$，$P=\{|z|<\delta\}$，当 $|z|<\delta$ 时，$|\varphi(z)|<\eta$，η 是一个很小的数，则 f 是在 $\{(z,w)\in\mathbf{C}^{n+1}||z|<\delta,\ \eta<|w|<R\}$ 上全纯，故可以有 Laurent 展开：

$$f(z,w)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}f_\nu(z)w^\nu,$$

由于 f 是在 $(0,0)$ 点奇异的，故有 $\nu_0<0$，使在 $P=\{|z|<\delta\}$ 上 $f_{\nu_0}\not\equiv 0$；设 $S=\{z\in P|f_{\nu_0}(z)\neq 0\}$．函数

$$g(\lambda,w)=f(\lambda z_0,w),\qquad z_0\in S$$

是在集合 $\{(\lambda,w)|\lambda\in D,\ w\neq\varphi(\lambda z_0)\}$ 上全纯的，进一步对每个 λ，$g(\lambda,w)$ 一定在某个点 (λ,w_0) 是奇异的（否则对 μ 在 λ 的一个邻域中，有 $f_{\nu_0}(\mu z)\equiv 0$，故由解析开拓原理 $f_{\nu_0}(z_0)=0$，这是矛盾的）．故而 $g(\lambda,w)$ 正好是在集合 $w=\varphi(\lambda z_0)$ 上是奇异的，由上面证明过的 $n=1$ 的结果推出 $w=\varphi(\lambda z_0)$ 是全纯的．

现在再由第3章的引理3推得φ是在Ω上全纯的.

某些奇异点集的解析性

命题5 设Ω是$\mathbf{C}^n$内的连通集，$D=\{w\in\mathbf{C}\mid |w|<R\}$和$K$是$D$中的紧致子集，$A\subset\Omega\times K$，且假设存在$p>0$，使对每个$z\in\Omega$

$$A_z=\{w\in D\mid(z,w)\in A\}$$

是一个至多有p个元素的有限集. 假设有一个在$\Omega\times D-A$上的全纯函数f，它在A的每点都是奇异的，则在Ω上有全纯函数$\varphi_1,\cdots,\varphi_q$，$q\leqslant p$，使得

$$A=\{(z,w)\in\Omega\times D\mid w^q+\varphi_1(z)w^{q-1}+\cdots+\varphi_q(z)=0\};$$

特别地，A是一个解析集.

证 设q是当z遍历Ω时A_z的元素个数的极大值，设U是Ω的子集，当$z\in U$时，A_z正好有q个元素. 我们断言U是开的. 设$a\in U$和$A_a=\{w_1,\cdots,w_q\}$. 令$\varepsilon<\frac{1}{2}\max\limits_{i\neq j}|w_i-w_j|$，今只要证明当$z$在$a$的邻近时，$A_z\cap\{w\in\mathbf{C}\mid |w-w_i|<\varepsilon\}\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,q$. 由假定$A_z$是$f$的型如$(z,w)$的奇异点集，由定理2立刻推得$A_z\cap\{w\in\mathbf{C}\mid |w-w_i|<\delta\}\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,q$.

对$z\in U$，设$A_z=\{w_1(z),\cdots,w_q(z)\}$，再令

$$g(z)=\prod_{i<j}(w_i(z)-w_j(z))^2.$$

我们断言$g(z)$是在U上全纯的. 要证明这点，今设$a\in U$和z是在a邻近. 设$\varepsilon<\frac{1}{2}\max\limits_{i=j}|w_i(a)-w_j(a)|$，对每个$i$和$a$邻近的$z$，令$w_i(z)$是$A_z$的适合$|w_i(z)-w_i(a)|<\varepsilon$的元素. 对邻近$a$的$z$，我们能应用定理3于$w_i(z)$；因此$w_i(z)$是对$a$邻近的$z$是全纯的，因此推出$g$是在$U$上全纯的.

设$a_\nu\in U$，$a_\nu\to a\in(\partial U)\cap\Omega$. 由假定$w_i(a_\nu)\in K$，故有一子序列$\{\nu_k\}$，使$w_i(a_\nu)\to w_i\in K$，$i=1,2,\cdots,q$. 因为$A$是闭的（见定义1后的注），故$(a,w_i)\in A$；$i=1,\cdots,q$. 因为

$a \bar{\in} U$，故必有 $w_i = w_j$ 对某些 $i \neq j$ 成立．因为每个 $w_i(z)$ 在 U 上显然是有界（注意 $w_i(z) \in K$）．由此得到 $g(a_{\nu_k}) \to 0$；当 $k \to \infty$．这一点对任一序列 $a_\nu \to a$ 均成立，故有 $g(a_\nu) \to 0$；当 $\nu \to \infty$．因此由 Rado 定理(定理 1)，在 Ω 上定义函数 $h(z)$

$$h(z) = \begin{cases} g(z), & z \in U, \\ 0, & z \in \Omega - U \end{cases}$$

是在 Ω 上全纯的．进而有 $\Omega - U = \{z \in \Omega \mid h(z) = 0\}$ 是 Ω 内的一个解析集

对 $z \in U$，定义

$$P'(z,w) = \prod_{i=1}^{q} (w - w_i(z)) = w^q + \varphi_1'(z) w^{q-1} + \cdots + \varphi_q'(z),$$

这里 $\varphi_k'(z) = (-1)^k \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant q} w_{i_1}(z) \cdots w_{i_k}(z)$ 是 $\{w_i(z)\}$ 的 k 初次等对称函数．由于 $w_i(z) \in K$，故 φ_k' 是在 U 上有界的．进一步有 φ_k' 在 U 上是全纯的(见前面 g 是全纯的证明)．因此，由命题 2，存在有 Ω 上的全纯函数 φ_k，它在 U 上的限制是 φ_k'．

设 $P(z, w) = w^q + \varphi_1(z) w^{q-1} + \cdots + \varphi_q(z)$． 如果 $(z, w) \in \Omega \times \mathbf{C}$ 和 $P(z, w) = 0$，则 $w \in K$．显然的，当 $z \in U$ 时，则 $A_z = \{w \in \mathbf{C} \mid P(z, w) = 0\}$．从 U 是在 Ω 中稠的，得到

$$A \subset \{(z, w) \in \Omega \times \mathbf{C} \mid P(z, w) = 0\}.$$

反之，如果 $(z, w) \in \Omega \times \mathbf{C}$ 和 $P(z, w) = 0$，则 $w \in K \subset D$．如果 $z_\nu \to z$；$z_\nu \in U$，则有 $w_\nu \in \mathbf{C}$，$P(z_\nu, w_\nu) = 0$，且 $w_\nu \to w$．由于 $(z_\nu, w_\nu) \in A_{z_\nu} \subset A$ 和 A 是闭的，故 $(z, w) \in A$，所以

$$A = \{(z, w) \in \Omega \times \mathbf{C} \mid P(z, w) = 0\}.$$

定理 4 设 W 是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的一个开集和子集 $A \subset W$，使得

(a) 对 $\forall a = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in W$，有一个邻域 $\Omega \times D$；$\Omega \subset \mathbf{C}^n$，$D = \{|w - a_{n+1}| < \rho\} \subset \mathbf{C}$ 和 $p > 0$，使对 $\forall z \in \Omega$，集合 $\{w \in D \mid (z,w) \in A\}$ 至多包含有 p 个点．

(b) 有一个在 $W - A$ 上的全纯函数 f，它在 A 的每点都是奇异的，则 A 是 W 的一个解析子集．

证 设 $a \in W$ 和 $\Omega \times D$ 是 (a) 中所指的 a 的邻域. 今考虑 $\{w \in D | (a', w) \in A\} = \{w_1, \cdots, w_q\}$, $a' = (a_1, \cdots, a_n)$. 设 $0 < r < \rho$, 使得 $\{a'\} \times \{w || w - a_{n+1}| = r\} \cap A = \emptyset$. 则对充分小的 ε, 集合 $|z - \alpha'| \leqslant \varepsilon$, $r - \varepsilon \leqslant |w - a_{n+1}| \leqslant r + \varepsilon$ 与 A 不相交. 如果 $P = \{z \in \mathbf{C}^n || z - \alpha'| < \varepsilon\}$, $D_0 = \{w \in \mathbf{C} || w - a_{n+1}| < r + \varepsilon\}$, 则 $A \cap (P \times D_0)$ 在 D_0 上的投影是包含在 D 的紧致集 $\{w || w - a_{n+1}| \leqslant r\}$ 之中. 故由命题 5, 存在有 P 上的全纯函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_q$; $q \leqslant p$, 使 $A \cap (P \times D_0) = \{(z, w) \in P \times D_0 | w^q + \varphi_1(z) w^{q-1} + \cdots + \varphi_q(z) = 0\}$, 则显然 A 是一个解析集.

关于解析集的结果请参阅 [16], [20]. Hartogs 在 [14] 证明了定理 3.

Radó 定理的一种形式可见之于 [26], 它在复分析上的用途是由 H. Behnke 和 K. Stein 发现的.

在命题 5 中, 我们假定了集 A_z 内点的个数作为 z 的函数是有界的. 对进一步的推广, 这个假定是否是本质的还是未知的.

第 5 章

有界域的自同构

Cartan 唯一性定理

设Ω是$\mathbf{C}^n$中的一个开集，$f=(f_1,\cdots,f_m)$: $\Omega\to\mathbf{C}^m$ 是一个映照．我们称f是全纯的，如果每一个f_j是全纯的，$1\leqslant j\leqslant m$.

定义 1 设Ω是$\mathbf{C}^n$中的一个连通开集(域)．全纯映照$f:\Omega\to\Omega$称为(解析)自同构，如果存在全纯映照 $g:\Omega\to\Omega$，使得 $g\circ f=\mathrm{id}$，$f\circ g=\mathrm{id}$ (id 是Ω的恒等映照)．

注 在本章末尾我们证明的 Osgood 的一个定理表明Ω到它自身之上的一个一一的全纯映照是一个自同构．

设D是$\mathbf{C}^n$中的一个有界域，我们以 $\mathrm{Aut}(D)$ 表示D的自同构的集合．对映照的复合运算，$\mathrm{Aut}(D)$ 是一个群．我们在$\mathrm{Aut}(D)$上引进拓扑如下．

设$K\subset D$是紧致的，U是包含于D的开集，则当K遍及D的紧致子集、U遍及开集时，集合 $\{\sigma\in\mathrm{Aut}(D)|\sigma(K)\subset U\}$ 遍及$\mathrm{Aut}(D)$ 的拓扑的开集基．这个拓扑有一个可数基，它由集合$\{\sigma\in\mathrm{Aut}(D)|\sigma(K_\nu)\subset U_\mu\}$ 组成，其中$\{U_\mu\}_{\mu=1,2,\cdots}$是$D$中开集的可数基，$\{K_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots}$ 是紧致集合的序列，它使$\{\mathring{K}_\nu\}$对D组成一个开集基．序列$\{\sigma_\nu\}\subset\mathrm{Aut}(D)$收敛的充要条件是$\sigma_\nu$在$D$的紧致子集上一致收敛于一个元素 $\sigma\in\mathrm{Aut}(D)$．而且，$\mathrm{Aut}(D)$是 Hausdorff 空间，同时又是一个拓扑群[映照$(\sigma,\tau)\longmapsto\sigma\circ\tau^{-1}$ 是连续的]．

命题 1 (H. Cartan) 设D是$\mathbf{C}^n$中的有界域，$f:D\longrightarrow D$ 是全纯映照．假定存在$a\in D$使得 $f(a)=a$．设f在a的齐次多项式的级数展式有形式

$$f(z)=z+P_k(z-a)+\cdots.$$

这里P_k是n个分量的行向量而每一分量是k次齐次多项式．

则 $f(z) \equiv z$.

证 我们可以假定 $a=0$. 设 D 包含于多圆柱 $\{z \mid |z_j| < R\}$ 之中(由于 D 有界, 这种 $R>0$ 是存在的). 如果 F 是映 D 到其自身之中的一个全纯映照, $F(z)=(F_1,\cdots,F_n)$, 同时

$$F(z)=\sum a_\alpha z^\alpha \quad (a_\alpha=(a_\alpha^1,\cdots,a_\alpha^n)\in \mathbf{C}^n)$$

是关于 0 的 Taylor 展式, 则由 Cauchy 不等式(第 1 章命题 3), 我们有 $|a_\alpha| \leqslant R\rho^{-|\alpha|}$, 这里 $\rho>0$ 使得 $\{z\in \mathbf{C}^n \mid |z_j|<\rho\}\subset D$.

现在考虑 f 的 k 次迭代 f^k, 其定义为 $f^1=f$, $f^k=f\circ f^{k-1}$. 假定 $f(z)\not\equiv z$. 令 N 是最小整数使得有

$$f(z)=z+P_N(z)+\cdots,\quad P_N(z)\not\equiv 0.$$

对 k 作归纳法,易见有

$$f^k(z)=z+kP_N(z)+\cdots.$$

由于 f^k 是 D 到其自身内的一个映照,由上述可知, $kP_N(z)$ 中的系数的绝对值都 $\leqslant R\rho^{-N}$. 由于 k 是任意的,这表明 $P_N\equiv 0$,矛盾.

圆形域的自同构

定义 2 有界域 $D\subset \mathbf{C}^n$ 称为圆型域, 如果对 $z\in D$ 和 $\theta\in \mathbf{R}$ 有 $e^{i\theta}z\in D$.

命题 2 (H. Cartan) 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的圆型域,

$$f=(f_1,\cdots,f_n)\in \mathrm{Aut}(D).$$

假定 $0\in D$ 同时 $f(0)=0$, 则每一个 f_j 都是线性的,即

$$f_j(z)=a_{1j}z_1+\cdots+a_{nj}z_n,\quad a_{ij}\in \mathbf{C}.$$

证 对任一全纯映照 $g:D\to D$, 我们用 $dg=(dg)_0$ 表示由下式给出的 $\mathbf{C}^n$ 到其自身之中的线性映照:

$$(dg)(V_1,\cdots,V_n)=(W_1,\cdots,W_n),$$

$$W_k=\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial z_j}(0)\cdot V_j,\qquad g=(g_1,\cdots,g_n).$$

设 $\theta\in \mathbf{R}$, $K_\theta\in \mathrm{Aut}(D)$ 表示映照 $z\to e^{i\theta}z$, 则 K_θ 的逆就是 $K_{-\theta}$. 设 φ 是 f 的逆,令 $g=K_{-\theta}\circ\varphi\circ K_\theta\circ f$. 由于 K_θ 和 f 都保持原点不变,所以 $K_{-\theta}$ 和 φ 亦然,我们求得

$$dg=dK_{-\theta}\circ d\varphi\circ dK_\theta\circ df.$$

现在 $dK_\theta = e^{i\theta}\mathrm{id}.$ 是 $\mathbf{C}^n$ 到其自身之中的一个线性映照并与 $\mathbf{C}^n$ 的任一线性映照可交换．因此，$dg=(dK_{-\theta}\circ dK_\theta)\circ(d\varphi\circ df)$．显然由于 $dK_{-\theta}\circ dK_\theta = \mathrm{id}. = d\varphi\circ df$，所以 $dg = \mathrm{id}$．同时 $g(0)=0$．因而 g 在 0 的齐次多项式的级数展式有形式

$$g(z) = z + P_k(z) + \cdots.$$

所以由命题 1 有 $g(z)\equiv z$．这对所有 $\theta\in\mathbf{R}$ 就有

$$K_\theta\circ f = f\circ K_\theta.$$

因此，若 $f=(f_1,\cdots,f_n)$，我们有 $f_i(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}f_i(z)$．如果 $f_i(z) = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} a_\alpha z^\alpha$，我们推得对所有 $\theta\in\mathbf{R}$ 有

$$e^{i\theta}a_\alpha = e^{i|\alpha|\theta}a_\alpha.$$

这表明如果 $|\alpha|\neq 1$，就有 $a_\alpha = 0$．命题得证．

定义 3 全纯映照 $f:D\to D'$，$D\subset\mathbf{C}^n$，$D'\subset\mathbf{C}^m$ 称为正常的，如果对任一紧致的 $K'\subset D'$，集合 $f^{-1}(K')$ 在 D 内紧致．

注 显然，域 D 的自同构是正常的．而且，$f:D\to D'$ 是正常的充要条件是对任一在 D 内无极限点的序列 $\{z_\nu\}\subset D$，序列 $\{f(z_\nu)\}$ 在 D' 也无极限点．

现在我们将看到如何利用这些结果去决定一个多圆柱的所有自同构．

命题 3 设 $D=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z_j|<1\}$，则对任一 $f\in\mathrm{Aut}(D)$，存在整数从 1 到 n 的一个置换 $p:(1,\cdots,n)\to(1,\cdots,n)$，实数 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\mathbf{R}$，以及复数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$|\alpha_j|<1$，使得有

$$f(z) = \left(e^{i\theta_1}\frac{z_{p(1)}-\alpha_1}{1-\bar\alpha_1 z_{p(1)}},\cdots,e^{i\theta_n}\frac{z_{p(n)}-\alpha_n}{1-\bar\alpha_n z_{p(n)}}\right).$$

证 令 $\sigma_\alpha(z) = \left(\dfrac{z_1-\alpha_1}{1-\bar\alpha_1 z_1},\cdots,\dfrac{z_n-\alpha_n}{1-\bar\alpha_n z_n}\right)$，$|\alpha_j|<1$，则对 $|\alpha_j|<1$ 有 $\sigma_\alpha\in\mathrm{Aut}(D)$，同时对 $z_0\in D$，有 $\sigma_{z_0}(z_0)=0$．因而将 f 换为 $\sigma_\alpha\circ f$，$\alpha=f(0)$，我们就可假定 $f(0)=0$．下面我们证明如果 $f(0)=0$，则

$$f(z) = (e^{i\theta_1}z_{p(1)},\cdots,e^{i\theta_n}z_{p(n)}).$$

由命题 2，如果 $f=(f_1,\cdots,f_n)$，我们有

$$f_k(z)=\sum_{j=1}^{n}a_{k_j}z_j,\quad a_{k_j}\in\mathbf{C}.$$

而且，如果 $|z_j|<1$，则 $|f_k(z)|<1$ (因为 $f(D)\subset D$)．因此，如果选取 $z_j=re^{i\psi_j}$，其中 $a_{kj}=|a_{kj}|e^{-i\psi_j}$，对 $r<1$，得到

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|<\frac{1}{r},\ \text{对任何}\ r<1.$$

此即

$$\text{(I)}\qquad A_k=\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\leqslant 1.$$

对给定的 j，现在我们考虑序列 $z_\nu=\left(0,\cdots,1-\dfrac{1}{\nu},\cdots,0\right)$这里第 j 个分量是 $1-\dfrac{1}{\nu}$ 而其余是 0．由命题 3 后面的注，$f(z_\nu)$ 的每一个在 $\mathbf{C}^n$ 中的极限点在 ∂D 上．由于

$$f(z_\nu)=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)(a_{1j},\cdots,a_{nj})\to(a_{1j},\cdots,a_{nj}),$$

我们可以断定后一点是在 ∂D 上，此即

$$\max_{k=1,\cdots,n}|a_{kj}|=1,\ j=1,\cdots,n.$$

设 $k(1)$ 使得 $|a_{k(1),1}|=1$．由上面的(I)，对 $j=2,\cdots,n$ 有 $a_{k(1),j}=0$．设 $k(2)$ 使得 $|a_{k(2),2}|=1$，则 $k(2)\neq k(1)$ (因为 $a_{k(1),2}=0$)．同时由(I)对 $j\neq 2$ 有 $a_{k(2),j}=0$．于是，如果 $k(j)$ 使得 $|a_{k(j),j}|=1$，则 $(k(1),\cdots,k(n))$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的一个置换，同时对 $i\neq j$ 有 $a_{k(j),i}=0$．如果 p 是我们刚才构造的置换的逆置换，我们有 $f_k(z)=a_{k,p(k)}z_{p(k)}$，$|a_{k,p(k)}|=1$．证毕．

$\mathbf{C}$ 中任意两个 $\neq\mathbf{C}$ 的单连通区域是解析等价的，这是 Riemann 证明的一个经典定理．命题 3 使人们知道对于 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 中的域，情况是非常不同的．

多圆柱和球不解析等价的 Poincaré 定理

命题 4 (Poincaré)　设 $P=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2\,|\,|z_j|<1,j=1,2\}$ 以及 $B=\{z\in\mathbf{C}^2\,|\,|z_1|^2+|z_2|^2<1\}$．则不存在把 P 映为 B 的解

析同构.

证 由于把 P 的任一点映为 0 的 P 的自同构是存在的，因此只要证明不存在同构 $f:B\to P$ 使得 $f(0)=0$ 就够了. 假定这种同构存在，则映照 $\sigma\longmapsto f\circ\sigma\circ f^{-1}$ 是拓扑群 $\mathrm{Aut}(B)$ 到拓扑群 $\mathrm{Aut}(P)$ 上的一个同构. 因此，若 G_0 表示拓扑群 G 的元素 e 的连通分支，则 $\mathrm{Aut}(B)_0$ 与 $\mathrm{Aut}(P)_0$ 是同构的. 而且上述映照诱导了 $\mathrm{Aut}(B)$ 的保持 0 不动的子群 G 到 $\mathrm{Aut}(P)$ 的保持 0 不动的子群 H 上的一个同构. 因此 G_0 同构于 H_0. 由命题 3 可得，任何 $\sigma\in H$ 充分接近于 e 有形式

$$\sigma(z_1, z_2)=(e^{i\theta_1}z_1,\ e^{i\theta_2}z_2),\quad \theta_1,\theta_2\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

(因为对 $|z_1|\leqslant\frac{1}{2}$, $|z_2|\leqslant\frac{1}{2}$ $\sup|z_2e^{i\alpha_2}-z_1e^{i\alpha_1}|\geqslant\frac{1}{2}$*).)因此 H_0 只包含上述形为(1)的元素，所以是交换群. 另一方面，G_0 包含所有形式为 $z\to Az$ 的元素 τ，这里 A 是 2×2 的酉矩阵. 因此 2×2 的酉群 $U(2)\subset G_0$ 是 G_0 的子群. 所以 G_0 不可能是交换群因而 G_0 不同构于 H_0.

现在我们证明 Remmert 和 Stein 的一些定理，这些定理表明在 $n>1$ 个变数时，情况远为复杂. 我们从一个引理开始.

正常全纯映照

引理 1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个连通开集，$f_1,\cdots,f_m$ 在 Ω 上全纯. 假定 $\sum_{j=1}^{m}|f_j(z)|^2$ 在 Ω 上是常数，则 f_j 都是常数.

证 如果 φ 在 Ω 上全纯，对 $k=1,\cdots,n$, 我们有

$$\frac{\partial^2|\varphi|^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}=\frac{\partial^2\varphi\bar{\varphi}}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}=\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\varphi\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}_k}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}_k}=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right|^2.$$

因此，如果 $\sum|f_j(z)|^2=$ 常数，我们有

$$0=\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_k}\sum|f_j(z)|^2=\sum\left|\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right|^2$$

*) 原书此处误为 "$\sup|z_2e^{i\alpha_2}-z_1e^{i\alpha_1}|\geqslant 1$". ——译者注

因而对 $j=1,\cdots,m$, $k=1,\cdots,n$ 有 $\dfrac{\partial f_j}{\partial \bar z_k}=0$.

Remmert-Stein 定理和这个定理的若干推广

定理 1 (Remmert-Stein) 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，令 $n=n_1+n_2$, $n_1,n_2>0$. 假定存在一个点 $a\in\partial D$ 和包含点 a 的开集 $U=U_1\times U_2$, $U_j\subset\mathbf{C}^{n_j}$, 使得 $U\cap D=D_1\times D_2$, D_j 是 $\mathbf{C}^{n_j}$ 内的连通开集而且 $\overline{D}_2\cap U_2\neq U_2$, 则对任何 $m\geqslant 1$, 不存在 D 到超球

$$B_m=\left\{(W_1,\cdots,W_m)\in\mathbf{C}^m\,\middle|\,\sum_{j=1}^m|W_j|^2<1\right\}$$

内的正常全纯映照.

(注意,特别如果 $D=D_1\times D_2$ 且有界，则条件是满足的;我们可取 $U=\mathbf{C}^n$.)

证 设 $f=(f_1,\cdots,f_m)$ 是 D 到 B_m 内的正常全纯映照. 我们令 $z=(\zeta,\omega)$, $\zeta\in\mathbf{C}^{n_1}$, $\omega\in\mathbf{C}^{n_2}$. 设 $\omega_\nu\in D_2$ 而且

$$\omega_\nu\to\omega\in(\partial D_2)\cap U_2.$$

对 $j=1,\cdots,m$, 函数 $\zeta\longmapsto f_j(z,\omega_\nu)$ 是 D_1 上的全纯函数记以 $\varphi_{j,\nu}$ 而且有 $\sum|\varphi_{j,\nu}|^2<1$. 因此，由 Montel 定理(第 1 章命题 6)，存在子序列 $\{\nu_k\}$ 使得在 D_1 的紧致子集上一致地有 $\varphi_{j,\nu_k}\to\varphi_j$. 现在,对任何 $\zeta\in D_1$, $\{(\zeta,\omega_{\nu_k})\}$ 在 D 无极限点. 由于 f 是正常的,所以 $f(\zeta,\omega_{\nu_k})=(\varphi_{1,\nu_k}(\zeta),\cdots,\varphi_{m,\nu_k}(\zeta))$ 在 B_m 无极限点. 由于在 D_1 有 $\sum|\varphi_{j,\nu_k}(\zeta)|^2<1$, 我们可断定

$$\sum_{j=1}^m|\varphi_j(\zeta)|^2=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^m|\varphi_{j,\nu_k}(\zeta)|^2=1,$$

对所有 $\zeta\in D_1$ 成立. 因此,由引理 1, $\varphi_j=$ 常数, $j=1,\cdots,m$.

现在如果 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n_1})$, 由 Weierstrass 定理(第 1 章命题 5),有

$$\frac{\partial f_j(\zeta,\omega_{\nu_k})}{\partial\zeta_p}\to\frac{\partial\varphi_j}{\partial\zeta_p}=0,\quad p=1,\cdots,n_1.$$

因此，对 $p=1,\cdots,n_1$, 如果 ω 趋于 $(\partial D_2)\cap U_2$ 的一点，则 $\dfrac{\partial f_j(\zeta,\omega)}{\partial\zeta_p}$ 趋于 0. 所以对固定的 $\zeta\in D_1$, 函数

$$\omega \to \begin{cases} \partial f_j(\zeta, \omega)/\partial \zeta_p, & 若\ \omega \in D_2, \\ 0, & 其它情形, \end{cases}$$

在 U_2 是全纯的（Radó 定理，第 4 章定理 1）. 由假定 $U_2 - \overline{D}_2 \neq \phi$，这表明

$$\frac{\partial f_j}{\partial \zeta_p} \equiv 0 \text{ 在 } D_1 \times D_2 \text{ 成立}, p = 1, \cdots, n_1.$$

因此在 D 有 $\partial f_j/\partial \zeta_p \equiv 0$, $p = 1, \cdots, n_1$. 所以在集合

$$D_1(\omega^0) = \{\omega = \omega^0, \omega^0 \in D_2\}$$

的任一连通分量上，映照 f 是常数. 显然 $D_1(\omega^0)$ 在 D 不是相对紧致的，因此 f 不可能是正常的.

定理 2 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个域，令 $n = n_1 + n_2$, $n_1, n_2 > 0$. 假定存在一点 $a \in \partial D$ 和一个包含 a 的连通开集 $U = U_1 \times U_2$, $U_j \subset \mathbf{C}^{n_j}$，使得 $U \cap D = D_1 \times D_2$，这里 U_j 是 $\mathbf{C}^{n_j}$ 内的连通开集，而且 $\overline{D}_2 \cap U_2 \neq U_2$. 令 $W = W_1 \times \cdots \times W_m$ 是 $\mathbf{C}^m$ 内的域，而 $W_1, \cdots, W_m$ 都是 $\mathbf{C}$ 中的有界域.（$\mathbf{C}^n$ 的点我们记以 (z, w), $z \in \mathbf{C}^{n_1}$, $w \in \mathbf{C}^{n_2}$.）

设 $f = (f_1, \cdots, f_m)$ 是 D 到 W 内的一个正常的全纯映照，则至少对于一个 j, $1 \leqslant j \leqslant m$，有 f_j 是局部不依赖于 z 的，此即若 $z = (z_1, \cdots, z_{n_1})$，对 $p = 1, \cdots, n_1$ 有 $\partial f_j/\partial z_p = 0$.

证 我们需要下列广义的 Radó 定理.

(*) 设 $(\varphi_{\mu\nu})$, $1 \leqslant \mu \leqslant K$, $1 \leqslant \nu \leqslant l$，是 $D \subset U$ 上的全纯函数组成的矩阵，这里 D 与 U 都是 $\mathbf{C}^n$ 的连通开子集，同时

$$U - \overline{D} \neq \phi.$$

假定当 $z \in D$, $z \to \zeta$ 时，对任何 $\zeta \in (\partial D) \cap U$ 有

$$p(z) \equiv \prod_{\nu=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{k} |\varphi_{\mu\nu}(z)|^2 \to 0,$$

则对某个 ν_0, $1 \leqslant \nu_0 \leqslant l$，我们有

$$\varphi_{\mu\nu_0} \equiv 0, \quad \mu = 1, \cdots, k.$$

(*) 的证明 设 $a \in (\partial D) \cap U$, P 是以 a 为心的多圆柱并包含于 U. 令 $\alpha \in D \cap P$, $\beta \in P - \overline{D}$，同时令 $V \subset \mathbf{C}$ 而且

$$V = \{\lambda \in \mathbf{C} | \alpha + (\beta - \alpha)\lambda \in P\},$$
$$V' = \{\lambda \in \mathbf{C} | \alpha + \lambda(\beta - \alpha) \in D \cap P\},$$

设

$$s(\lambda) = p(\alpha + \lambda(\beta - \alpha)), \qquad \lambda \in V.$$

V 是连通的．我们令

$$u(\lambda) = \begin{cases} \log s(\lambda), & \lambda \in V', \\ -\infty, & \lambda \in V - V'. \end{cases}$$

我们在下面证明 u 在 V 是次调和的．这样由第 3 章引理 2 我们就得到在 V 上有 $u \equiv -\infty$．此即对 $\alpha \in P \cap D, \beta \in U - \overline{D}$ 和 $\lambda \in V$ 有 $p(\alpha + \lambda(\beta - \alpha)) = 0$．显然这就表明在 $D \cap P$ 有 $p = 0$，从而在 D 上也有 $p = 0$．

为了证明 u 在 V 是次调和的，由第 3 章命题 4 只要证明 u 在开集 $V'' = V' - \{\lambda \in V' | u(\lambda) = -\infty\}$ 是次调和的就够了．在 V'' 我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} \log \sum_{\mu=1}^{k} |\varphi_{\mu\nu}(\alpha + \lambda(\beta - \alpha))|^2.$$

现在如果 $f_1, \cdots, f_k$ 都在 V'' 全纯而且不同时为 0，则我们有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} \log \sum_{\mu=1}^{k} |f_\mu(\lambda)|^2 \\ &= \left(\sum_{\mu=1}^{k} |f_\mu(\lambda)|^2\right)^{-2} \left\{\sum_{\mu=1}^{k} |f_\mu(\lambda)|^2 \sum_{\mu=1}^{k} \left|\frac{df_\mu(\lambda)}{d\lambda}\right|^2 \right. \\ &\qquad \left. - \left|\sum_{\mu=1}^{k} \bar{f}_\mu(\lambda) \frac{df_\mu(\lambda)}{d\lambda}\right|^2\right\}, \end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式，上式 $\geqslant 0$．这证明了我们的断言，由此(*)得证．

定理 2 的证明 设 $\{w_\nu\}$ 是 D_2 的点的序列并收敛于点

$$w^0 \in (\partial D_2) \cap U_2.$$

这样就存在一个子序列 $\{w_{\nu_k}\}$ 使得如果 $\varphi_{j,\nu_k}(z) = f_j(z, w_{\nu_k})$，则 $\{\varphi_{j,\nu_k}\}$ 在 D_1 的紧致子集上一致收敛到函数 φ_j (Montel 定理，因

W_j 有界). 由于 f 是正常的, $f(z, w_\nu)$ 的极限点不在 W 内. 由此, 对所有 $z \in D_1$, 有 $(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_m(z)) \in \partial W$, 令

$$E_j = \{z \in D_1 | \varphi_j(z) \in \partial W_j\}.$$

则 $\bigcup E_j = D_1$. 由于每一个 E_j 在 D_1 显然是闭的, 因此对某个 j, $1 \leqslant j \leqslant m$, E_j 有一个非空的内部 V. 由于 φ_j 是 V 到 ∂W_j 的映照, 同时一个非常数的全纯函数是到 $\mathbf{C}$ 内的开映照, 这就得到 φ_j 是常数. [注意指标 j, 从演绎上, 是依赖于序列 $\{w_\nu\}$, $\{w_{\nu_k}\}$ 的.] 因此, 在 D_1 上有 $\partial\varphi_j/\partial z_\nu \equiv 0$, $\nu = 1, \cdots, n_1$ $(z=(z_1, \cdots, z_{n_1}))$. 在任何情况, 对任意序列 $\{w_\nu\}$ 若趋于 $(\partial D_2) \cap U_2$ 的一点, 则存在

$$\prod_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_1} \left| \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z, w_\nu) \right|^2$$

的一个子序列趋于 0. 因此

$$\prod_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_1} \left| \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z, w) \right|^2$$

当 w 趋于 $(\partial D_2) \cap U_2$ 的一个点时, 趋于 0. 由(*)我们有:

(**) 对每个 $z \in D_1$, 存在 $j = j(z)$ 使得

$$p_j(z, w) = \sum_{\nu=1}^{n_1} \left| \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z, w) \right|^2 = 0,$$

对所有 $w \in D_2$ 成立. 由于集合

$$F_j = \{(z, w) \in D_1 \times D_2 | p_j(z, w) = 0\}$$

是闭集, 同时 $\bigcup F_j = D_1 \times D_2$, 因此至少有一个 F_j 有一个内点. 显然, 对这个 j, 在 D 上有

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z, w) \equiv 0, \qquad \nu = 1, \cdots, n_1,$$

(由解析开拓原理).

引理 2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内一个开集, $n \geqslant 2$, 则不存在 Ω 到域 $W \subset \mathbf{C}$ 内的正常全纯映照.

证 假设引理中的正常全纯映照存在并记为 f*). 设 $a \in \Omega$ 而

---

*) 此句为译者所加. ——译者

$A = f^{-1}f(a)$，则A紧致．令$g(z) = (f(z)-f(a))^{-1}$，g在$\Omega - A$全纯． 设B是包含A的以0为心具有最小半径的闭超球（一般，$B \not\subset \Omega$)，则存在$z_0 \in (\partial B) \cap A$．我们可设$B$的半径是1．选取$\mathbf{C}^n$的适当的正交基，我们可设 $z_0 = (0, \cdots, 0, 1)$．若$\delta > 0$充分小，则集合$\{|z_1| = \delta, z_2 = z_3 = \cdots = z_{n-1} = 0, z_n = 1\}$包含于 $\Omega - A$．因此,若$\varepsilon > 0$充分小,则$\{|z_1| \leqslant \delta + \varepsilon, |z_j| \leqslant \varepsilon, j = 2, \cdots, n-1, |z_n - 1| \leqslant \varepsilon\}$也包含于$\Omega - A$，所以$g$在此集合全纯． 而且当$\eta > 0$充分小，$g$在集合$\{|z_1| \leqslant \delta + \varepsilon, |z_j| \leqslant \varepsilon, j = 2, \cdots, n-1, z_n = 1 + \eta\}$全纯(因为这些点到原点的距离$\geqslant |z_n| = 1 + \eta > 1$，而$B$的半径是1)．因此（由第4章定理2）$g$能全纯开拓到$z_0$的一个邻域，这是不可能的，因为$\Omega - A$是稠密的,而且当$z \to z_0$时有$g \to \infty$．

定理3 设$D = D_1 \times D_2 \subset \mathbf{C}^2$, $D_j \subset \mathbf{C}$以及$W = W_1 \times W_2$, $W_j \subset \mathbf{C}$ 都是$\mathbf{C}^2$中的有界开集． 令 $f = (f_1, f_2)$ 是D到W内的一个正常全纯映照,则f_j有形式$f_j(z_{p(j)})$, $j = 1, 2$，而p是$(1, 2)$的一个置换．

证 由定理2，若 $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$，则$f_j$中有一个不依赖于$z_1$，也有一个不依赖于$z_2$．只要证明$f_j$不可能都不依赖于$z_1$和$z_2$就够了．但是,例如若$f_1$不依赖于$z_1$及$z_2$则$f_1$为常数,而$f_2: D \to W_2$就是一个正常的全纯映照,与引理2矛盾．

定理3特别应用于D到W上的解析同构．下述最一般的结果易从定理2的推理而得到．

命题1 设D_j, W_j 是 $\mathbf{C}^{n_j}$中的有界域,$j = 1, \cdots, k$．关于W_j有下述假定:

∂W_j在$\mathbf{C}^{n_j}$的一个开集中不包含维数为正的解析集合．

令 $f = (f_1, \cdots, f_k)$是$D = D_1 \times \cdots \times D_k$到 $W_1 \times \cdots \times W_k$内的一个正常的全纯映照，这里$f_j$是$D$到$\mathbf{C}^{n_j}$内的一个映照．$D$的点$z$记以$(z_1, \cdots, z_k)$，$z_j \in \mathbf{C}^{n_j}$，则存在集合$(1, \cdots, k)$的一个置换$p$以及正常映照

$$g_j: D_j \to W_{p(j)},$$

使得

$$f = g_1 \times \cdots \times g_k.$$

命题的证明要用到引理 2 的下述推广.

若 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, $W \subset \mathbf{C}^m$, $(m < n)$ 都是开集,则不存在 Ω 到 W 内的正常全纯映照.

对于这后一事实的证明,可见 [20] 的第 III 章命题 10 及其推论和第 VII 章命题 1 及 2.

而且,在自同构的情形, H. Cartan 证明了上述命题的下述推广(见 [8]).

命题 II (H. Cartan) 设 $D = D_1 \times D_2$ 是有界域,$D_j \subset \mathbf{C}^{n_j}$, $n = n_1 + n_2$, n_1, $n_2 > 0$. 则任何 $f \in \mathrm{Aut}(D)$ 属于 $\mathrm{Aut}(D)$ 的单位连通分量就有形式 $f = f_1 \times f_2$, $f_j \in \mathrm{Aut}(D_j)$.

现在我们证明一个基本定理,它又是 H. Cartan 作出的,同时给出它的一些应用.

Cartan 定理 Aut(D) 在 D 上的作用 某些离散群的有限生成

定理 4 (H. Cartan) 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域. 令 $\{f_\nu\} \subset \mathrm{Aut}(D)$ 是 D 的自同构序列. 假定 $\{f_\nu\}$ 在 D 的紧致子集上一致收敛于一个全纯映照 $f: D \to \mathbf{C}^n$. 则下列三个性质是等价的.

(i) $f \in \mathrm{Aut}(D)$,

(ii) $f(D) \not\subset \partial D$,

(iii) 存在点 $a \in D$ 使得 jacob 矩阵$\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(a)\right)$ 的行列式不等于零, $f = (f_1, \cdots, f_n)$.

我们需要两个准备性的命题.

如果 $f: \Omega \to \mathbf{C}^m$ 是一个全纯映照, $a \in \Omega$, 我们以 $(df)_a$ 表示 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^m$ 内的线性映照,其定义为

$$(df)_a(v_1, \cdots, v_n) = (w_1, \cdots, w_m),$$

其中

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(a), \quad f = (f_1, \cdots, f_m).$$

引理 3 设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$f:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是全纯映照．假定对某个 $a\in\Omega$ 有 $\det(df)_a\neq 0$，则存在 a 的邻域 U 和 $f(a)$ 的邻域 V 使得 $f(U)\subset V$ 以及 $f|U$ 是到 V 上的一个解析同构．

这是我们没有给予证明的隐函数定理的一个特殊情况．其证明，例如可见[21]第 1 章．

命题 5 设 $\{\varphi_\nu\}$ 是 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 中的连续开映照序列．假定 φ_ν 在 Ω 的紧致子集上一致收敛于映照 $\varphi:\Omega\to\mathbf{C}^n$．

假定对某个 $a\in\Omega$，a 是 $\varphi^{-1}\varphi(a)$ 的孤立点，则对 a 的任何邻域 U，存在一个 ν_0 使得对 $\nu\geqslant\nu_0$ 有 $\varphi(a)\in\varphi_\nu(U)$．

证 设命题不成立．我们不妨假定 U 有下述性质*)：

$\bar{U}$ 紧致，$\varphi(a)\notin\varphi_\nu(\bar{U})$，$\nu=1,2,\cdots$，

$\bar{U}\cap\varphi^{-1}\varphi(a)=\{a\}$，

则 $\varphi(\partial U)$ 是紧致的，同时 $\varphi(a)\notin\varphi(\partial U)$．因此存在 $\varphi(\partial U)$ 的一个邻域 V 以及以 $\varphi(a)$ 为心的多圆柱 P 使得

$$(*)\qquad P\cap V=\varnothing.$$

现在如果 ν_0 充分大，则对 $\nu\geqslant\nu_0$ 有 $\varphi_\nu(\partial U)\subset V$．由于 φ_ν 是开映照，我们有 $\partial\varphi_\nu(U)\subset\varphi_\nu(\partial U)$．因此 $\varphi_\nu(U)$ 是在 $\mathbf{C}^n$ 中的一个相对紧致的开集，而且 $\partial\varphi_\nu(U)\subset V$．现在我们断言：当 ν 足够大时，$\{\partial\varphi_\nu(U)\}\cap P\neq\varnothing$（这与上述的 (*) 相矛盾从而完成证明）．由于 $\varphi(a)\in P$ 以及 $\varphi_\nu(a)\to\varphi(a)$，所以如果 ν 充分大，有 $\varphi_\nu(a)\in P$．另一方面，由假定，$\varphi(a)\notin\varphi_\nu(U)$．如果

$$\{\partial\varphi_\nu(U)\}\cap P=\varnothing,$$

我们有

$$P=\{\varphi_\nu(U)\cap P\}\cup\{(\mathbf{C}^n-\overline{\varphi_\nu(U)})\cap P\}.$$

同时上式右端两个开集都是非空的［$\varphi_\nu(a)$ 属于前者，$\varphi(a)$ 属于后者］，这与 P 是连通的这一事实相矛盾．因而

$$\{\partial\varphi_\nu(U)\}\cap P\neq\varnothing,$$

命题得证．

---

*) 事实上，所述性质对某个子序列 $\{\varphi_{\nu_k}\}$ 成立，不妨设此子序列就是 $\{\varphi_\nu\}$．——译者注

系（Hurwitz 定理） 设Ω是$\mathbf{C}^n$中的连通开集，$\{f_\nu\}$是Ω上的全纯函数序列，它在紧致集上一致收敛于全纯函数f．如果对所有ν及z有$f_\nu(z)\neq 0$，而且f不是常数，则对所有$z\in\Omega$，我们有$f(z)\neq 0$．

证 设$a\in\Omega$，$f(a)=0$．令P是一个小的多圆柱，以a为心，则在P上，$f\not\equiv 0$（否则，由于Ω是连通的，f在Ω上就恒为0）．令$b\in P$，$f(b)\neq 0$，设$D=\{\lambda\in\mathbf{C}|a+\lambda(b-a)\in P\}$，则$D$是凸的，因而是$\mathbf{C}$中的连通开集．令$\varphi_\nu(\lambda)=f_\nu(a+\lambda(b-a))$，$\varphi(\lambda)=f(a+\lambda(b-a))$，则$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=f(b)\neq 0$，因此$\varphi$在$D$上不是常数．因而对充分大的$\nu$，$\varphi_\nu$也不是常数，而是$D$到$\mathbf{C}$中的一个开映照（由第1章命题4）．由上述命题5，如果ν充分大，有$f_\nu(\Omega)\supset\varphi_\nu(D)\supset\{0\}$，矛盾．

定理4的证明 (i)$\Rightarrow$(ii)．显然．(i)$\Rightarrow$(iii)．设$f\in\mathrm{Aut}(D)$，$a\in D$，同时$g=f^{-1}\in\mathrm{Aut}(D)$，我们有

$$g\circ f=\mathrm{id.},$$

因而$(dg)_{f(a)}\circ(df)_a=\mathrm{id.}$，所以$(df)_a$是可逆的．

(iii)$\Rightarrow$(ii)．如果$(df)_a$的行列式不等于0，则由引理3，$f(D)$包含$f(a)$的一个（非空）邻域，因而$f(D)\not\subset\partial D$．

(ii)$\Rightarrow$(iii)． 显然$f(D)\subset\overline{D}$．因而如果(ii)成立，则$f(D)\cap D\neq\varnothing$．设$a\in D$使得$f(a)=b\in D$．令$g_\nu=f_\nu^{-1}$，同时令$\{\nu_k\}$是一个子序列，使得$\{g_{\nu_k}\}$在$D$的紧致子集上一致收敛于$g:D\to\mathbf{C}^n$（第1章命题6即 Montel 定理）．我们有

$$g(b)=\lim_{k\to\infty}f_{\nu_k}^{-1}(f(a)).$$

而且如果k充分大，则$f_{\nu_k}(a)$逼近于$f(a)$，这对D的紧致子集亦然．由于$f_{\nu_k}^{-1}$在D的紧致子集一致收敛，我们推得

$$g(b)=\lim_{k\to\infty}f_{\nu_k}^{-1}(f_{\nu_k}(a))=\lim_{k\to\infty}a=a.$$

因此$g(b)=a\in D$．设V是b的一个小邻域．则$g(V)$位于D的一个紧致子集内部，所以存在K在D紧致，使得$g_{\nu_k}(V)\subset K$（k充分大），则对$x\in V$，我们有

$$f(g(z)) = \lim_{k\to\infty} f(g_{\nu_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(g_{\nu_k}(x)) = x.$$

(第二个等式成立是由于 $g_{\nu_k}(V)\subset K$, 同时 $f_{\nu_k}\to f$ 在 K 是一致的.)因此对 $x\in V$ 有 $(df)_{g(x)}\circ(dg)_x = I$, 特别对 $y\in g(V)$ 有

$$\det((df)_y) \neq 0,$$

这证得 (iii). 余下的只要证

(iii) ⇒ (i). 函数 $j_\nu(x) = \det(df_\nu)_x$ 在 D 全纯同时在 D 的紧致子集一致收敛于 $j(x) = \det(df)_x$. 而且如果(iii)成立,则 $j(x) \not\equiv 0$. 由于 $f_\nu \in \mathrm{Aut}(D)$ 所以对所有 ν 和所有 x 也有 $j_\nu(x) \neq 0$ (见(i) ⇒ (iii) 的证明). 如果 $j(x)$ 是常数,则 $j(x)$ 显然不为 0, 如果 $j(x)$ 不是常数, 由上述命题 5 的推论, $j(x)$ 也恒不取 0. 因此不论那种情况, 对 $x\in D$ 都有 $j(x) \neq 0$. 由引理 3, $f: D\to \mathbf{C}^n$ 是一个开映照,同时对任何 $x\in D$ 是 $f^{-1}f(x)$ 中的孤立点. 从命题 5,得到 $f(D)\subset \bigcup f_\nu(D) = D$.

令 $\{\nu_k\}$ 是 $\{\nu\}$ 的一个子序列, 使得 g_{ν_k} 在 D 的紧致子集上一致收敛,则对 $x\in D$, $\{f_{\nu_k}(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)\in D$, 因而就在 D 的紧致子集内. 所以对所有 $x\in D$ 有

$$g(f(x)) = \lim_{k\to\infty} g_{\nu_k}(f_{\nu_k}(x)) = x.$$

特别, 对 $y\in f(D)$, 有 $\det(dg)_y \neq 0$. 因而重复我们上面的论证, 我们可推得 $g(D)\subset D$, 所以对任何 $x\in D$, $g_{\nu_k}(x)$ 在 D 的紧致子集中. 因此

$$f(g(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(g_{\nu_k}(x)) = x.$$

这就有 $f\circ g = \mathrm{id}.$ $g\circ f = \mathrm{id}.$, 我们证得 $f\in \mathrm{Aut}(D)$.

现在我们给出这个定理的几个应用.

命题 6 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界域, K, L 在 D 紧致, 则集合

$$G(K, L) = \{f\in \mathrm{Aut}(D) \mid f(K)\cap L \neq \varnothing\}$$

是紧致的.

证 设 $\{f_\nu\}$ 是 $G(K, L)$ 的元素的序列. 通过取子序列, 我

们无妨假定 $\{f_\nu\}$ 收敛于一个 D 到 $\mathbf{C}^n$ 的全纯映照 (Montel 定理), 由 $f_\nu(K)\cap L \neq \varnothing$, 所以存在 $a_\nu\in K$ 使得 $f(a_\nu)=b_\nu\in L$. 如果 ν_k 是一个子序列使得 $a_{\nu_k}\to a\in K$, $b_{\nu_k}\to b\in L$ (K, L 都紧致), 则有 $f(a)=b$, 因而由定理 4 有 $f\in \mathrm{Aut}(D)$, 由于 $f(a)=b$, 所以 $f\in G(K, L)$. 由于 $G(K, L)$ 中元素的任一序列包含一个子序列在 $G(K, L)$ 收敛, 所以集合 $G(K, L)$ 紧致.

命题 7 设 D 是有界域, 则 $\mathrm{Aut}(D)$ 是局部紧致群.

证 若 K, L 都是 D 内的紧致集使得 $K\subset\mathring{L}$, 则 $G(K,L)$ 是单位元素的一个邻域(由 $\mathrm{Aut}(D)$ 上拓扑的定义), 由命题 6, 它是紧致的.

定义 4 设 G 是一个拓扑群, X 是一个 (Hausdorff) 拓扑空间. 我们称 G 运算于 X 上, 如果我们给定一个连续映照 $G\times X\to X$, $(g, x)\longmapsto g\cdot x$ 使得 $ex=x$ 对所有 $x\in X$ 成立, $(gg')x=g(g'x)$ 对所有 $g, g'\in G$, $x\in X$ 成立.

设 G 和 X 都是局部紧致的, 我们称 G 正常作用于 X 上, 如果由 $(g, x)\longmapsto(gx, x)$ 所定义的映照: $G\times X\to X\times X$ 是正常的.

如果 G 是离散的, X 是局部紧致的, 我们称 G 不连续的正常作用于 X 上, 如果对任何 $a\in X$, 存在 a 的一个邻域 U 使得

$$\{g\in G\,|\,g(U)\cap U\neq\varnothing\}$$

是有限的.

注 设 G, X 都是局部紧致的, 则 G 正常作用于 X 上的充要条件是对任何紧致集合 $K, L\subset X$, 有集合

$$G(K, L)=\{g\in G\,|\,g(K)\cap L\neq\varnothing\}$$

是紧致的.

事实上, 如果满足所设条件, 则任何在 $X\times X$ 中的紧致集包含于形为 $K\times K$ 的集合内, $K\subset X$ 紧致. 映照 $(g,x)\longmapsto(gx,x)$ 的 $K\times K$ 的逆象恰巧就是 $G(K, K)$, 因而紧致.

反之, 若映照 $(g, x)\longmapsto(gx, x)$ 是正常的, 则如上述, $G(K, K)$ 紧致, 同时 $G(K, L)\subset G(A, A)$, $A=K\cup L$.

一个离散群 G 不连续正常作用的充要条件是 $G(K, L)$ 对任

何紧致的 $K, L\subset X$ 都是有限的.

命题 8 如果 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域,则 $\mathrm{Aut}(D)$ 正常作用于 D 上.

这由上述注及命题 6 立即得出.

命题 9 设子群 $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(D)$ 具有离散拓扑,则 Γ 不连续正常作用于 D 上的充要条件是 Γ 为 $\mathrm{Aut}(D)$ 的离散子群〔此即一个离散子集〕.

证 如果 Γ 是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的一个离散子群, K, L 在 D 内紧致,则由命题 6, $\Gamma(K,L)=\{\gamma\in\Gamma|\gamma(K)\cap L\neq\varnothing\}$ 在 $\mathrm{Aut}(D)$ 内相对紧致. 由于 Γ 是离散的,因此 $\Gamma(K, L)$ 是闭的,它紧致,因而有限而且是 Γ 的子集.

反之,如果 Γ 是不连续正常作用的,而 K, L 在 D 紧致, $K\subset\mathring{L}$, 则 $\Gamma(K, L)$ 是 Γ 的单位元素的一个邻域(因为 $\Gamma(K, L)$ 包含了开集 $\mathring{L}\times U$ 在映照 $(\gamma, x)\longmapsto(\gamma x, x)$ 下的逆象在 Γ 上的投影,这里 U 在 D 中是开集同时 $K\subset U\subset\overline{U}\subset\mathring{L}$). 而且 $\Gamma(K,L)$ 是有限的(因为 Γ 是不连续正常作用的). 因而 Γ 是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的离散子群.

命题 10 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域, $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(D)$ 是一个离散子群. 设 D/Γ 是 D 的下述等价关系下的商: $x\sim y$, 如果存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $\gamma x=y$.

如果 D/Γ 是紧致的,则 Γ 是有限生成的.

证 设 $\{U_\nu\}$ 是在 D 内相对紧致开集的序列使得 $\overline{U}_\nu\subset U_{\nu+1}$, $\bigcup U_\nu=D$. 设 $\pi:D\to D/\Gamma$ 表示自然投影,则 π 是开的. 所以 $V_\nu=\pi(U_\nu)$ 是在 D/Γ 内开的,同时 $\bigcup V_\nu=D/\Gamma$. 由于 $V_\nu\subset V_{\nu+1}$, D/Γ 紧致,所以存在 p 使得 $V_p=D/\Gamma$. 这表明 $D=\bigcup\gamma(K)$, 此处 $K=\overline{U}_p$ 在 D 紧致.

设 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_N\}$ 是 Γ 中使得 $\gamma(K)\cap K\neq\varnothing$ 的元素组成的,很清楚, γ_i^{-1} 也是一个 γ_i, $i=1,\cdots,N$. 我们断言任何 $\gamma\in\Gamma$ 能写成形式 $\gamma=\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_p}$, $1\leqslant i_k\leqslant N$.

设 Γ' 是由 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_N\}$ 生成的子群. 由于 $\gamma_i^{-1}\in\{\gamma_1,\cdots,\gamma_N\}$, $1\leqslant i\leqslant N$, 所以 Γ' 是积 $\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_p}$ 的集合. 若 $\Gamma'\neq\Gamma$, 令

$\Gamma'' = \Gamma - \Gamma'$, $\Gamma'(K) = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} \gamma'(K)$, $\Gamma''(K) = \bigcup_{\gamma'' \in \Gamma''} \gamma''(K)$, 则由于 $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ 和 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(K) = D$, 我们有 $\Gamma'(K) \cup \Gamma''(K) = D$. 进而有 $\Gamma'(K) \cap \Gamma''(K) = \varnothing$. 事实上,如果 $\gamma' x = \gamma'' y, x, y \in K$, $\gamma' \in \Gamma'$, $\gamma'' \in \Gamma''$, 我们有 $\gamma y = x$; $\gamma = \gamma'^{-1}\gamma''$. 由于 $x, y \in K$, $\gamma \in \{\gamma_1, \cdots, \gamma_N\}$, 例如 $\gamma = \gamma_i$, 则 $\gamma'' = \gamma'\gamma_i \in \Gamma'$ 矛盾. 因而 $\Gamma'(K)$ 与 $\Gamma''(K)$ 是不相交的.

而且, $\{\gamma(K)\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是局部有限的, 此即 D 的任一点有一个邻域 U 使得 $\{\gamma \in \Gamma | \gamma(K) \cap U \neq \varnothing\}$ 是有限的. 这取 U 为任一紧致邻域就行了. 因此 $\Gamma'(K)$ 与 $\Gamma''(K)$ 在 D 都是闭的. 由于 D 是连通的以及 $\Gamma'(K) \neq \varnothing$, 这表明 $\Gamma''(K) = \varnothing$, 此即 $\Gamma'' = \varnothing$, 因而 $\Gamma' = \Gamma$, 命题得证.

现在我们证明本章开始时所提及的 Osgood 的一个定理. 我们需要秩定理(它比引理 3 强). 其证明见 [21] 的第 1 章.

一个从 $D \subset \mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}$ 内的单全纯映照是一个同构

秩定理 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开集, $f: \Omega \to \mathbb{C}^m$ 是全纯映照. 假定线性映照 $(df)_a$ 的秩是一个整数 $k \leqslant n$ 且不依赖于 $a \in \Omega$, 则对任意 $a \in \Omega$, 存在 a 的邻域 U, $f(a)$ 的邻域 V, $\mathbb{C}^n$ 中的以 0 为心的多圆柱 P 和 $\mathbb{C}^m$ 中的以 0 为心的多圆柱 Q 以及解析同构 $u: P \to U$ 和解析同构 $v: V \to Q$, 使得映照 $v \circ f \circ u: P \to Q$ 有形式 $(z_1, \cdots, z_n) \to (z_1, \cdots, z_k, 0, \cdots 0,)$. 特别, 若 $k < n$, 则不存在 $a \in \Omega$, 使得 a 在 $f^{-1}f(a)$ 孤立.

定理 5 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开集, $f: \Omega \to \mathbb{C}^n$ 是一个单叶全纯映照, 则 f 是 Ω 到 $\mathbb{C}^n$ 中一个开集 Ω' 上的同胚, 而且逆映照 f^{-1}: $\Omega' \to \Omega$ 是全纯的.

证 我们可设 Ω 是连通的. 我们首先断言存在 $a \in \Omega$, 使得 $(df)_a$ 的秩是 n (因此 $\det((df)_a) \neq 0$). 设这不成立, 令

$$k = \max_{a \in \Omega} \{\text{秩}\,(df)_a\} < n.$$

设 $x_0 \in \Omega$ 使得秩 $(df)_{x_0} = k$, 则显然, 存在 x_0 的一个邻域 U, 使得对 $x \in U$ 有秩 $(df)_x \geqslant k$ (由于 k 是最大的秩, 因而有秩 $(df)_x =$

$=k$). 由秩定理，x_0 在 $f^{-1}f(x_0)$ 不可能是孤立的，因此，存在 $x_1\in U$，$x_1\neq x_0$，而 $f(x_1)=f(x_0)$ 这与 f 是单叶的假设相矛盾.

设 $A=\{x\in\Omega\,|\det(df)_x=0\}$. 由于 $x\longmapsto\det(df)_x$ 显然是全纯的，同时正如上面所述，我们有 $A\neq\Omega$，因而 A 是 Ω 中的一个解析集合，$\Omega-A$ 在 Ω 内稠密. 如果我们证明 $A=\varnothing$，由引理 3 就立得定理.

设 $a\in\Omega$，P 是以 a 为心的一个小多圆柱，$\bar{P}\subset\Omega$，则 ∂P 是紧致的，因此 $K=f(\partial P)$ 也紧致. 由于 $a\notin\partial P$，f 是单叶的，所以 $f(a)\notin K$. 令 V 是以 $f(a)$ 为心的小多圆柱，$\bar{V}\cap K=\varnothing$，令 $U=f^{-1}(V)\cap P$，我们可以断言映照 $f:U\to V$ 是正常的. 事实上，若 C 在 V 紧致，则 $f^{-1}(C)$ 不可能接触到 ∂P（因为存在 ∂P 的邻域 N 使得 $f(N)\cap V=\varnothing$），因而在 P 内相对紧致. 所以 $f^{-1}(C)\cap U$ 是紧致的.

设 $W=f(U-A)$. 由引理 3，$f:U-A\to W$ 是一个解析同构（W 是 $\mathbb{C}^n$ 中开集）. 设 $g:W\to U-A$ 是 $f|(U-A)$ 的逆. 令 $\varphi(z)=\det((df)_z)$，$z\in U$，则 φ 在 U 全纯，$U\cap A=\{z\in U|\varphi(z)=0\}$. 设 $\psi(x)=\det((dg)_x)$，$x\in W$. 则 ψ 在 W 上全纯，由于在 W 上有 $f\circ g=\mathrm{id.}$，我们有

$$\varphi(g(x))\circ\psi(x)=1,\ x\in W.$$

设 $a\in(\partial W)\cap V$，同时 $x_\nu\in W$，当 $\nu\to\infty$ 时有 $x_\nu\to a$，则 $g(x_\nu)=f^{-1}(x_\nu)$ 是在 U 的一个紧致子集内（因为 $f:U\to V$ 是正常的）. 而且 $g(x_\nu)$ 的每一个极限点在 $A\cap U$ 上. 因此，由于 φ 在 U 上全纯，又 $\varphi|A\cap U=0$，所以当 $\nu\to\infty$ 时，有 $\varphi(g(x_\nu))\to 0$. 因此当 x 趋于 $(\partial W)\cap V$ 的点时，函数 $1/\psi$ 在 W 上趋于 0. 由 Radó 定理（第 4 章定理 1），函数

$$\eta(x)=\begin{cases}1/\psi(x), & x\in W,\\ 0, & x\in V-W.\end{cases}$$

在 V 上全纯，同时 $B=V-W=\{x\in V|\eta(x)=0\}$ 是 V 的一个解析集合，$B\neq V$. 因此 W 在 V 稠密. 而且，若 $g=(g_1,\cdots,g_n)$，g_j 在 W 上都有界，由于 $U\subset P$ 是有界的. 因此由第 4 章命题 2

(Riemann 开拓定理),存在一个全纯映照 $G:V\to\bar{U}\subset\Omega$ 使得

$$G|W=g,$$

则由于 $f\circ G|W=f\circ g=\mathrm{id}$. ($W$ 是稠密的),所以 $f\circ G$ 是 W 上的恒等变换. 这证明 $(f|U)^{-1}=G$ 是全纯的,定理得证.

Cartan 的基本定理是在[5]中 (命题 1 和 2). 自同构的极限定理是在[6]中,在本章中陈述而未予证明的关于有界域的拓扑积的自同构的结果可在[8]中找到.

关于 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 内的单全纯映照的逆的定理 5 可见于 Osgood [23] 和 [23] 中所给出的文献.

Remmert-stein 的结果可在 [28] 中找到,他们仅对两个平面域的积证明了定理 2 (及命题 I), 因为 Radó 定理仅直接应用于这种情况.

有关结果的一些文献可以在 [1] 中找到.

第 6 章

解析开拓：全纯包

一个 $\mathbf{C}^n$ 上的域的 S-扩充

在第 2 章内，我们已见到一个 $\mathbf{C}^n$ 内的域上的全纯函数的存在域能构造为一个 $\mathbf{C}^n$ 上的域. 现在我们将推广这些结果于一族全纯函数.

设 S 是一个集合，类似于第 2 章的考虑，我们定义 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数的 S-芽的层 $\mathcal{O}(S)$ 如下：

设 U 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个开集和 $\{f_s\}_{s\in S}$ 是 U 上的一个全纯函数族，它的指标集为 S. 对 $a\in\mathbf{C}^n$ 和 $(U,\{f_s\})$, $(V,\{g_s\})$; $a\in U$, $a\in V$, 我们称这两个对子是等价的，如果存在有一个 a 的邻域 W, $W\subset U\cap V$, 而且对 $\forall s\in S$, $f_s|W=g_s|W$. 关于这个关系的等价类称之为全纯函数在 a 点的一个 S-芽. 我们用 $\mathcal{O}_a(S)$ 表示在 a 点的 S-芽的集. 令 $\mathcal{O}(S)=\bigcup\limits_{a\in\mathbf{C}^n}\mathcal{O}_a(S)$. 我们有一个自然投影 $p=p_S:\mathcal{O}(S)\to\mathbf{C}^n$, 定义为 $p(g)=a$; 当 $g\in\mathcal{O}_a(S)$. 定义 $\mathcal{O}(S)$ 的拓扑如下(见第 2 章，当 S 为 1 个元素时的情况). 设 $\boldsymbol{g}_a\in\mathcal{O}_a(S)$ 和 $(U,\{f_s\})$ 是 $\boldsymbol{g}_a$ 的一个表示. 设 $\boldsymbol{g}_b$ 是由 $\{f_s\}$ 定义的在 $b\in U$ 的 S-芽；设 $N(U,\{f_S\})=\bigcup\limits_{b\in U}\boldsymbol{g}_b$. 集 $N(U,\{f_s\})$ 构成 $\boldsymbol{g}_a$ 的一个邻域基本系. 如果在第 2 章一样，我们能证明下面的引理：

命题 1 映照 $p:\mathcal{O}(S)\to\mathbf{C}^n$ 是连续的，且是 $\mathcal{O}(S)$ 到 $\mathbf{C}^n$ 上的一个局部同态. 进而 $\mathcal{O}(S)$ 是一个 Hausdarff 空间. $(\mathcal{O}(S), p, \mathbf{C}^n)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个非分支域.

设 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $p':X'\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的域. 一个连续映照 $u:X\to X'$ 称为**局部同构**(或**局部解析同构**)，如果对每个点 $a\in X$, 有一个邻域 U, $u|U$ 是到一个开集 $U'\subset X'$ 上的同胚，而且 $u|U$ 和

$(u|U)^{-1}$ 分别是在 U 和 U' 上全纯的. 如果加上 u 是 X 到 X' 上的同胚,我们称 u 是一个同构(或解析同构).

如果 $u:X\to X'$ 是一个连续映照, 而且 $p'\circ u=p$, 则 u 自然地是一个局部同构.

注意第5章引理3的推理对全纯映射 $\Omega\to\Omega'$ 成立.

定义 1 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个连通域, $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$. 设 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 是一个连通域和 $\varphi:\Omega\to X$ 是一个连续映照, 适合 $p\circ\varphi=p_0$. 我们称 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的一个 S-扩充, 如果对每个 $f\in S$, 有一个 $F_f\in\mathscr{H}(X)$ 使 $F_f\circ\varphi=f$.

这里 $\mathscr{H}(\Omega)$ 和 $\mathscr{H}(X)$ 分别表示 Ω 和 X 的全纯函数所成的集合.

注意这里 F_f 是唯一确定的(首先在 $\varphi(\Omega)$ 上有 $F_f\circ\varphi=f$, 由解析开拓原理,在 X 上亦是唯一确定的). 这也称为 f 在 X 上的开拓(或扩充).

定义 2 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域, $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$. 一个全纯 S-包是一个 S-扩充 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$, 且适合下列条件 (*) 对 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的任一个 S-扩充 $p':X'\to\mathbf{C}^n$, $\varphi':\Omega\to X'$, 有一个全纯映照 $u:X'\to X$, 使得 $p'=p\circ u$, $\varphi=u\circ\varphi'$ 和 $F'_f=F_f\circ u$ 对所有的 $f\in S$ 成立, 这里 F_f, F'_f 分别是 $f\in S$ 在 X, X' 上的扩充.

注意在(*)内的 u 是唯一的(因为在 $\varphi'(\Omega)$上是由方程 $u\circ\varphi'=\varphi$ 所决定).

事实上,只需要 $u\circ\varphi'=\varphi$ 在一点成立就够了,而在 Ω 上此等式成立就只是一个推论. 如果在某点 $a\in\varphi(\Omega)$ 函数 $\{F_f\}_{f\in S}$ 分离 $p^{-1}p(a)$ 的点,则方程 $\varphi=u\circ\varphi'$ 是(*)中的其他条件的推论.

注 如果全纯 S-包存在,则必在"同构"意义下唯一. 事实上,设 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$, $p':X'\to\mathbf{C}^n$ 和 $\varphi':\Omega\to X$ 是两个全纯 S-包, 则由定义 2 的(*),有全纯映照 $u:X'\to X$ 和 $v:X\to X'$, 而且 $p=p'\circ v$, $p'=p\circ u$, $\varphi=u\circ\varphi'$, $\varphi'=v\circ\varphi$, 则 $u\circ v\circ\varphi=u\circ\varphi'=\varphi$, 故 $u\circ v$ 是 $\varphi(\Omega)$ 上的恒等映照, $\varphi(\Omega)$ 是在 X 中开的, 因此由第 2

章的命题 5，在 X 上，$u\circ v=$ 恒等；类似地，在 X' 上，$v\circ u=$ 恒等. 因此 u 是 X' 到 X 上的同构；$p'=p\circ u$，$\varphi=u\circ\varphi'$，这是唯一的.

定理 1 (Thullen). 对任何 $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$，全纯 S-包存在.

证 对任一 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 和 $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$，我们定义 Ω 到 $\mathscr{O}(S)$ 内的映照 $\varphi=\varphi(p_0, S)$ 如下. 设 $a\in\Omega$ 和 $a_0=p(a)\in\mathbf{C}^n$. 设 U 是 a 的一个开邻域，而且 $p_0|U$ 是到开集 $U_0\subset\mathbf{C}^n$ 上的一个同构. 设 $\boldsymbol{g}_a$ 是 $(U_0, \{f_s\})$ 在 a 点定义的 S-芽，这里 $f_s=s\circ(p_0|U)^{-1}$，$s\in S$. 令 $\varphi(a)=\boldsymbol{g}_{a_0}$.

不难验证 φ 是连续的和 $p\circ\varphi=p_0$，这里 $p:\mathscr{O}(S)\to\mathbf{C}^n$ 是自然投影. 特别地，φ 是一个局部同构.

因为 Ω 是连通的，所以 $\varphi(\Omega)$ 亦是连通的. 设 X 是 $\mathscr{O}(S)$ 中包含 $\varphi(\Omega)$ 的连通分量，且仍用 p 表示 $p:\mathscr{O}(S)\to\mathbf{C}^n$ 在 X 上的限制.

我们断言 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 和 $\varphi:\Omega\to X$ 是 Ω 的一个全纯 S-包.

首先，我们观察到对每个 $s\in S$，有一个 $\mathscr{O}(S)$ 上的全纯函数 F_s 定义如下. 如果 $\boldsymbol{g}_z\in\mathscr{O}_z(S)$ 是由 $(V, \{g_s\})$ 所定义的，令 $F_s(\boldsymbol{g}_z)=g_s(z)$，我们立即可验证 F_s 是在 $\mathscr{O}(S)$ 上全纯的. 现将这个 F_s 在 X 上的限制仍记为 F_s，现在由 φ 的定义，推出 $F_s\circ\varphi=s$；$\forall s\in S$. 这证明了上面定义的 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 和 $\varphi:\Omega\to X$ 是一个 S-扩充*).

证明(*)，设 $p':X'\to\mathbf{C}^n$，$\varphi':\Omega\to X'$ 是任给的 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的一个 S-扩充，故有 $p'\circ\varphi'=p_0$，且对 $\forall s\in S$，存在 $F'_s\in\mathscr{H}(X')$，使 $s=F'_s\circ\varphi$. 设 $S'=\{F'_s\}_{s\in S}$，设 $u:X'\to\mathscr{O}(S)$ 是映照 $\varphi(p', S')$ (在证明开始时定义的). 从 $F'_s\circ\varphi'=S$ 和 $p'\circ\varphi'=p_0$，我们有 $\varphi=u\circ\varphi'$ (局部地 $F'_s\circ p'^{-1}=F'_s\circ\varphi'\circ\varphi'^{-1}\circ p'^{-1}=s\circ p_0^{-1}$). 显然的，$p'=p\circ u$. 故证明了(*)，所以定理 1 证完.

全纯包：基本性质

定义 3 如果 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域，$S=\mathscr{H}(\Omega)$，Ω 的全纯 S-包简单地称为 Ω 的全纯包.

---

*) 原书误为"这证明了定义 1 中之 (a)"，下面的证明(*)，也误为"证明 (b)". — 译者注

命题2 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个连通域和 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$。设 F 是 f 在 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯包 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 上的扩充．则

$$f(\Omega)=F(X).$$

特别地，如果 f 是有界的，且对 $\forall x\in\Omega$, $|f(x)|<M$, 则 F 亦是有界的，且 $|F(x)|<M$, $\forall x\in X$.

证 从 $f=F\circ\varphi$, 我们有 $f(\Omega)\subset F(X)$. 假如有一个 $c\in F(X)-f(\Omega)$, 则 $1/f-c\in\mathscr{H}(\Omega)$. 设 G 是它在 X 上的扩充，则 $G\cdot(F-C)$ 是 $1=(f-c)^{-1}(f-c)$ 在 X 上的扩充，故在 X 上有 $G\cdot(F-c)=1$. 这表明对 $\forall x\in X$ 有，$F(x)\neq c$，这是矛盾的．

命题3 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 和 $p_0':\Omega'\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的两个连通域，$p:X\to\mathbf{C}^n$ 和 $p':X'\to\mathbf{C}^n$ 是它们的全纯包．设 $u:\Omega\to\Omega'$ 是一个全纯映照，且是局部同构．则存在一个全纯映照，$\tilde{u}:X\to X'$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc}\Omega & \xrightarrow{u} & \Omega' \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi' \\ X & \xrightarrow{\tilde{u}} & X'\end{array},$$

这里 $\varphi:\Omega\to X$, $\varphi':\Omega'\to X'$ 是定义 1 中定义的映照．

证 设 $v=\varphi'\circ u:\Omega\to X'$, 则 v 是全纯的和局部同构．我们必须证明存在 $\tilde{u}:X\to X'$, 且适合 $\tilde{u}\circ\varphi=v$. 考虑映照 $\phi=p'\circ v:\Omega\to\mathbf{C}^n$. 则 ϕ 还是一个局部同构．如果 $\phi=(\phi^1,\cdots,\phi^n)$，这里 ϕ_i 都是全纯的，令 η 为 ϕ 的 Jacobi 行列式 $\eta=\det\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)$, 这里 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 如同第 2 章定义 5 中所定义的；当 f 是 Ω 上的全纯函数．则由于 ϕ 是一个局部同构故对 $\forall x\in\Omega$ 有 $\eta(x)\neq 0$, 设 Ψ_i 是 ϕ_i 在 X 上的扩充，且令 $\Psi=(\Psi_1,\cdots,\Psi_n)$. 设 H 是 η 在 X 上的扩充．则显然有 $H=\det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right)$，进而由命题 2，对 $\forall x\in X$ 有 $H(x)\neq 0$.
因此 $\Psi:X\to\mathbf{C}^n$ 是一个局部同构(第 5 章之引理 3)，而且 $\Psi\circ\varphi=\phi$.

现在考虑域 $\phi:\Omega\to\mathbf{C}^n$, $p':X'\to\mathbf{C}^n$ 和 $v:\Omega\to X'$. 令 $S=$

$\{f\circ u \mid f\in\mathscr{H}(\Omega')\}=\{F\circ v\mid F\in\mathscr{H}(X')\}$. 我们断言 $p':X'\to\mathbf{C}^n$ 是 $\phi:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯 S-包(见下面的引理). 现在 Ω 上的任一全纯函数能扩充到 X 上，故 $\Psi:X\to\mathbf{C}^n$ 是 $\phi:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 关于映照 $\varphi:\Omega\to X$ 的一个全纯 S-扩充. 从 $p':X'\to\mathbf{C}^n$ 是 $\phi:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯 S-包，故有一个全纯映照 $\tilde{u}: X\to X'$ 使得 $p'\circ\tilde{u}=\Psi$ 和 $\tilde{u}\circ\varphi=v$. 这就证明了命题.

引理 1 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$, $p'_0:\Omega'\to\mathbf{C}^n$ 是在 $\mathbf{C}^n$ 上的两个连通域和 $p':X'\to\mathbf{C}^n$, $\varphi':\Omega'\to X'$ 是 $p'_0:\Omega'\to\mathbf{C}^n$ 的全纯 T-包，这里 $T\subset\mathscr{H}(\Omega')$. 设 $u:\Omega\to\Omega'$ 是一局部全纯同构，令 $S=\{f\circ u\mid f\in T\}$，则 $p':X'\to\mathbf{C}^n$, $\varphi'\circ u:\Omega\to X'$ 是 $q_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯 S-包，这里 $q_0=p'_0\circ u$.

证 我们将 X' 等同于 $\mathscr{O}(T)$ 的某一个确定的连通分量，将 φ' 等同于在定理 1 的证明一开始构造的映照 $\varphi(p'_0, T)$. 映照 $f\longmapsto f\circ u$ 是 T 到 S 上的双方一一映照，故我们可以将 $\mathscr{O}(T)$ 和 $\mathscr{O}(S)$ 等同起来. 立刻可见 $\varphi(q_0, S)(\Omega)\subset\varphi(p'_0, T)(\Omega')$，所以 $\mathscr{O}(T)=\mathscr{O}(S)$ 中包含 $\varphi(q_0, S)(\Omega)$ 的连通分量就是 X'.

系 如果 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯包，则 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 是一个全纯域，也即 X 到它的全纯包的自然映照是一个同构(见下面的定义 4).

命题 3 的系 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个在 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域和

$$p:X\to\mathbf{C}^n,\quad \varphi:\Omega\to X$$

是它的全纯包，则对 Ω 的每个解析自同构 σ (即 σ 是同胚，而且 σ 和 σ^{-1} 都是全纯的)，存在一个 X 的解析自同构 $\tilde{\sigma}$，使得 $\varphi\circ\sigma=\tilde{\sigma}\circ\varphi$.

证 由系 2，有一个全纯映照 $\tilde{\sigma}:X\to X$，使得 $\varphi\circ\sigma=\tilde{\sigma}\circ\varphi$. 同样也有一个全纯映照 $\tau:X\to X$ 使得 $\varphi\circ\sigma^{-1}=\tau\circ\varphi$. 也即有 $\tau\circ\tilde{\sigma}\varphi=\tau\circ\varphi\circ\sigma=\varphi\circ\sigma^{-1}\circ\sigma=\varphi$，所以在 $\varphi(\Omega)$ 上 $\tau\circ\tilde{\sigma}=$ 恒等，因此在 X 上 $\tau\circ\tilde{\sigma}=$ 恒等. 类似的 $\tilde{\sigma}\circ\tau$ 亦是在 X 上是恒等映照，故证明此系.

命题 4 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域和 $q_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个全纯映照(相对于 p_0)，且是局部同构. 设 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$

和 $q:Y\to\mathbf{C}^n$, $\phi:\Omega\to Y$ 分别是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 和 $q_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯包，则存在有一个解析同构 $F:X\to Y$，使得 $\phi=F\circ\varphi$。

证 设 $u:\Omega\to\Omega$ 是恒等映照．由命题 2，存在全纯映照 $F:X\to Y$, $G:Y\to X$ 使得 $\phi=F\circ\varphi$, $\varphi=G\circ\phi$．则

$$G\circ F\circ\varphi=G\circ\phi=\varphi,$$

所以在 $\varphi(\Omega)$ 上 $G\circ F=$ 恒等，因此 $G\circ F$ 在 X 上亦是恒等映照，类似地，$F\circ G$ 是在 Y 上的恒等映照．

注意，除非 $p_0=q_0$，我们不会有 $p=q\circ F$．

系 设 p_0, q_0, φ, ϕ 定义如上命题，则 $\varphi:\Omega\to X$ 是一个解析同构，当且仅且 $\phi:\Omega\to Y$ 是一个解析同构．

定义 4 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域和 $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$． Ω 称为是全纯 S-域（或 S 的存在域），如果 Ω 到它的全纯 S-包的自然映照是一个解析同构．当 $S=\mathscr{H}(\Omega)$时，Ω 简单地称为全纯域．

注意由上面的系，一个域是全纯域的性质是与局部解析同构 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 无关（只要所用的不同的映照相互之间都是局部解析同构的）．

引理 2 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个连通域，$S\subset\mathscr{H}(\Omega)$． 假如对每个 $f\in S$ 和 $\forall\alpha\in\mathbf{N}^n$，有 $D^\alpha f\in S$．设 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯 S-包，则 φ 是单的，当且仅当对 $\forall a\in\Omega$, S 分离 $p_0^{-1}p_0(a)$ 的点．

证 我们将 X 等同于 $\mathscr{O}(S)$ 的一个连通分量，将 φ 等同于定理 1 证明中的 $\varphi(p_0,S)$．显然 φ 是单的，当且仅当下列事实成立：

设 b, $b'\in p_0^{-1}(a)$, $a\in p_0(\Omega)$, $b\neq b'$ 并设 U, U' 分别是 b, b' 的邻域，而且 $p_0|U=q_0$, $p_0|U'=q_0'$ 是 U 和 U' 到以 a 为心的一个多圆柱 P 上的同构，则有一个 $f\in S$，使得在 P 上有 $f\circ q_0^{-1}\neq f\circ q_0'^{-1}$．这当且仅当有一个 $\alpha\in\mathbf{N}$，使得

$$(D^\alpha f)\circ q_0^{-1}(a)\neq(D^\alpha f)\circ q_0'^{-1}(a),$$

由此推出引理．

系 1 如果 $S=\mathscr{H}(\Omega)$，则如果 φ 是单的，则 $\mathscr{H}(\Omega)$ 必分离 Ω 的点．

证 设 $p_0=(p_1,\cdots,p_n)$，这里 $p_j\in\mathscr{H}(\Omega)$. 设 $a, a'\in\Omega$，且 $a\neq a'$. 如果 $p_0(a)=p_0(a')$，由引理 2 必有 $f\in S$，使 $f(a)\neq f(a')$. 如果 $p_0(a)\neq p_0(a')$，则有一个 j; $1\leqslant j\leqslant n$，使

$$p_j(a)\neq p_j(a').$$

系 2 如果 $p: X\to\mathbf{C}^n$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯包，则 $\mathscr{H}(X)$ 分离 X 的点.

例子：一个 $\mathbf{C}^n$ 内的域的全纯包不再在 $\mathbf{C}^n$ 内；一个不在 $\mathbf{C}^n$ 内的域的全纯包可以在 $\mathbf{C}^n$ 内.

例 我们将给出一个例子，说明在 $\mathbf{C}^n$ 上的域的这种考虑是必要的；有在 $\mathbf{C}^n$ 内的域，它的全纯包不再在 $\mathbf{C}^n$ 内. 下面的例子是 H. Cartan 给出的.

设 $(z, w)\in\mathbf{C}^2$，$z=x+iy$. 设

$$\Omega_1=\{(z,w)\in\mathbf{C}^2 \mid -4<x<0,\ |w|<e^x\},$$

$$\Omega_2=\{(z,w)\in\mathbf{C}^2 \mid 0\leqslant x<4,\ e^{-\frac{1}{x}}<|w|<1\},$$

令 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，则 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的连通开子集. 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是映照 $p_0(z, w)=(\exp(iz), w)$，则 p_0 是单的，因为如果 $p_0(z, w)=p_0(z', w')$，则 $w=w'$ 和 $\mathrm{Im}z=\mathrm{Im}z'$, $\mathrm{Re}z'-\mathrm{Re}z=2k\pi$; $k\in\mathbf{Z}$. 假如 $\mathrm{Re}z<\mathrm{Re}z'$，(即 $k\geqslant 1$)，则从 $\mathrm{Re}z'<4$，得到 $\mathrm{Re}z'<4-2\pi$ (由 (z, w), $(z', w')\in\Omega$，故必有 $\mathrm{Re}z'>0$). 今无妨认为 $k=1$，则有

$$e^{-1/\mathrm{Re}z'}<|w|<e^{\mathrm{Re}z},$$

此即，

$$e^{-\frac{1}{x+2\pi}}<|w|<e^x;\qquad x=\mathrm{Re}z.$$

从 $x>-4$，$x+2\pi>2$，所以特别地有

$$e^{-\frac{1}{2}}<e^{4-2\pi},$$

这是荒谬的.

现在如果 f 在 Ω 内全纯，则 f 能展开成一个级数

$$f(z, w)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}a_\nu(z)w^\nu,$$

它在 Ω 的紧致子集上一致收敛. 如果对 $\mathrm{Re}z<0$ 的固定 z，则

$w \longmapsto f(z, w)$ 是在 $w=0$ 的邻域内全纯的. 因此 $a_\nu(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$, $\nu < 0$. 因此

$$f(z,w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z) w^\nu.$$

因为这个级数在 Ω 的紧致子集上一致收敛，它一定在 $X = \Omega_1 \cup \Omega_2'$ 的紧致子集上一致收敛，这里 $\Omega_2' = \{0 \leqslant x \leqslant 4, |w| < 1\}$. 因此 $p: X \to \mathbf{C}^2$; $p(z, w) = (\exp(iz), w)$ 是 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^2$ 的一个 $\mathscr{H}(\Omega)$-扩充. 但是 p 不是单的(例如 $p(-\pi, e^{-2\pi}) = p(\pi, e^{-2\pi})$). 这立刻推得全纯包有同样的性质[实际上 $p: X \to \mathbf{C}^2$ 是 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^2$ 的全纯包].

另一个这样的例子如下.

设 $H = \{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Re} z > 0\}$ 和 $\Omega = H \times \mathbf{C} \subset \mathbf{C}^2$. 设

$$\Omega_z = \Omega_1 - \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 | |z+3| \leqslant 2, |w| \leqslant 2\},$$

$$\Omega = \Omega_z \cup \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 | |z-3| < 1, |w| < 1\}.$$

设 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是映照 $(z, w) \longmapsto (z^2, w)$. 从第 2 章的结果，易于推知 Ω_2 上的任一全纯函数能开拓到 Ω_1 上，和 $(z, w) \longmapsto (z^2, w)$ 在 $\Omega_1 \cup \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 | |z-3| < 1, |w| < 1\}$ 上不是单的.

下面我们将证明有这样的 $\mathbf{C}^n$ 上的域 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^n$, 它的 p_0 不是单的，然而它的全纯包的投影 $p: X \to \mathbf{C}^n$ 依然是单的. 为此我们将需要下面的定理.

设 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域，我们称这个域是一个 Reinhardt 域，如果下面所叙述的事实成立.

有一个给定的 $a_0 \in \Omega$, 且 $p_0(a_0) = 0$ (称为 Ω 的原点).

设 $T^n = \{(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n | |\zeta_1| = 1, \cdots, |\zeta_n| = 1\}$. 对每个 $\zeta \in T^n$, 给定一个 Ω 的解析自同构 σ_ζ, 对 $\forall \zeta \in T^n$ 其适合

$$p_0 \circ \sigma_\zeta = \zeta \circ p_0 \text{ 和 } \sigma_\zeta(a_0) = a_0.$$

这里 $\zeta \circ p_0(x) = (\zeta_1 p_1(x), \cdots, \zeta_n p_n(x))$; 如果

$$p_0(x) = (p_1(x), \cdots, p_n(x)),$$

立刻可验证 $\sigma_\zeta \circ \sigma_{\zeta'} = \sigma_{\zeta \circ \zeta'}$ (这里 $\zeta \circ \zeta' = (\zeta_1 \zeta_1', \cdots, \zeta_n \zeta_n')$, 当 $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 和 $\zeta' = (\zeta_1', \cdots, \zeta_n')$). 进而能证明由 $(\zeta,$

$x) \longmapsto \sigma_\zeta(x)$ 定义的 $T^n \times \Omega \to \Omega$ 的映照是连续的.

在这些假设下,我们有

命题 5 对 $\forall f \in \mathscr{H}(\Omega)$, 有一个幂级数 $\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha T^\alpha$, 使得

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha (p_0(x))^\alpha,$$

而且此级数在Ω的紧致子集上一致收敛.

证 这个证明本质上与第 2 章的定理 2 相同. 设 $a \in \Omega$ 和U是 a 的一个邻域,而且 $p_0|U$ 是一个到以 $p_0(a)$ 为心的多圆柱 P 上的同构. 对 $x \in U$*), 设 $p_0(x) = (x_1, \cdots, x_n)$, 设 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ 是 $p_0(x)$ 中那些坐标为 0 的分量. 如果 $\zeta \in T^n$, 令 $\zeta' = (\zeta'_1, \cdots, \zeta'_n)$, 这里 $\zeta'_j = \zeta_j$; 当 $j \neq i_p$, $p = 1, \cdots, k$, 和 $\zeta'_j = 1$; 当 $j = i_1, \cdots, i_k$, 则 $(\zeta_1 x_1, \cdots, \zeta_n x_n) = (\zeta'_1 x_1, \cdots, \zeta'_n x_n)$; 所以 $\zeta \longmapsto \sigma_\zeta(x)$, $\zeta \longmapsto \sigma_{\zeta'}(x)$ 是映照 $\zeta \longmapsto \zeta \circ p_0(x)$ 的两个提升, 从它们对 $\zeta = (1, \cdots, 1)$时是相同的, 推出 $\sigma_\zeta(x) = \sigma_{\zeta'}(x)$ 对所有的 $\zeta \in T^n$ 成立.

现在我们证明,如果 $T^n(x) = \bigcup_{\zeta \in T^n} \{\sigma_\zeta(x)\}$, 则 $p_0|T^n(x)$ 是单的. 事实上,如果 $p_0(\sigma_\zeta(x)) = p_0(\sigma_\eta(x))$, 则有

$$\zeta \circ p_0(x) = \eta \circ p_0(x),$$

因此 $\zeta' p_0(x) = \eta' p_0(x)$, 再从 ζ' 和 η' 关于 $i_1, \cdots, i_k$ 的坐标是相等的,得出 $\zeta' = \eta'$. 因此

$$\sigma_\zeta(x) = \sigma_{\zeta'}(x) = \sigma_{\eta'}(x) = \sigma_\eta(x).$$

易知 $T^\eta(x)$ 有一个邻域 N, 使 $p_0|N$ 是单的. 因此如果上面的U取得充分小, 则 $p_0|\bigcup_{\zeta \in T^n} \sigma_\zeta(U)$ 是到 $\bigcup_{\zeta \in T^n} \zeta \circ P$ 上的一个同构. 而 $\bigcup_{\zeta \in T^n} \zeta \circ P$ 是一个型为 $\{x \in \mathbf{C}^n | r_j < |z_j| R_j\}$ 的集. 因此对 $\forall f \in \mathscr{H}(\Omega)$, 有一个级数 $\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} c_\alpha T^\alpha$ 使得 $\sum c_\alpha (p_\alpha(x))^\alpha$ 在 a 的邻域内

---

*) 原书为 "$x \in \Omega$". ——译者注

是一致收敛于 f 的. 如同第 2 章定理 2 的证明一样，可进一步证明，有一个级数 $\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} c_\alpha(p_0(x))^\alpha$ 是在 Ω 的任一紧致子集上收敛于 $f(x)$ 的. 如果在原点 $a_0\in\Omega$ 的一个邻域内观察这个级数，我们就发现这个级数必须形为 $\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} c_\alpha(p_0(x))^\alpha$.

命题 6 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个 Reinhardt 域和 $p:X\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯包，则 X 是一个 Reinhardt 域和 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 是单的.

证 设 $x_0=\varphi(a_0)$, $\zeta\longmapsto\sigma_\zeta$ 是 T^n 到 Ω 的定义 Ω 的 Reinhardt 域结构的自同构集内的映射. 由命题 3 的系 1，有一个 X 上的自同构 τ_ζ，使得 $\varphi\circ\sigma_\zeta=\tau_\zeta\circ\varphi$，特别地 $\tau_\zeta(x_0)=x_0$. 显然 τ_ζ 使 X 成为一个 Reinhardt 域.

由命题 5，$\forall f\in\mathscr{H}(X)$，则对 $\forall x\in X$，f 在 $p^{-1}\circ p(x)$ 的任两点取同样的值. 由引理 2 的系 2，$\mathscr{H}(X)$ 分离 X 的点，因此对每个 $x\in X$, $p^{-1}\circ p(x)$ 收缩为一个点，故 p 是单的.

因此要构造一个域不在 $\mathbf{C}^n$ 内，而它的全纯包是 $\mathbf{C}^n$ 内的那种域，只需要构造一个 Reinhardt 域 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$，且 p_0 不是单的.

设 Q_0 是 $\mathbf{R}^2$ 的如下之集:

$$Q_0=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leqslant x<2,\ 0\leqslant y<2\}$$
$$-\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x=1,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

令

$$Q_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\ 0\leqslant x<2,\ 0\leqslant y<1\},$$

且设 $D_j=\{(z,w)\in\mathbf{C}^2\,|\,(|z|,|w|)\in Q_j\}$; $j=0,1$. 考虑不连通和 $X=D_0\cup D_1$，今在 X 内引进如下等价关系: $(z_0,w_0)\sim(z_1,w_1)$，当且仅当 $z_0=z_1$; $w_0=w_1$ 和 $1<|z_1|<2$; $0<|w_1|<1$，这里 $(z_0,w_0)\in D_0$; $(z_1,w_1)\in D_1$. 设 Ω 是 X 关于这个关系的商，$p_0:\Omega\to\mathbf{C}^2$ 是由 D_0, D_1 到 $\mathbf{C}^2$ 内的内射所诱导的映照，则 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^2$ 显然是一个 Reinhardt 域，而 p_0 不是单的.

有关本章的结果可考参文献[1],[10],[19]和[29].

第 7 章

全纯域：凸性理论

在这章，$p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 全表示 $\mathbf{C}^n$ 上的连通域.

定义 1 (a) 如果 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$，A 是 Ω 的子集，则令

$$\|f\|_A=\sup_{x\in A}|f(x)|.\quad(\leqslant\infty).$$

(b) 如果 A 是 Ω 的一个子集，$S\subset\mathscr{H}(\Omega)$，则我们令

$$\hat{A}_S=\{x\in\Omega\,|\,|f(x)|\leqslant\|f\|_A,\ \text{所有}\ f\in S\}.$$

如果 $S=\mathscr{H}(\Omega)$，则我们令 $\hat{A}=\hat{A}_S$.

注 如果 S 在乘法下是封闭的，则

$$\hat{A}_S=\{x\in\Omega\,|\ \text{存在}\ M_x>0\ \text{使得}\ |f(x)|\leqslant M_x\|f\|_A\ \text{对所有}\ f\in S\ \text{成立}\}.$$

证 如果我们以 B 表示右端的集合，则我们有 $\hat{A}_S\subset B$. 现在，如果 $x\in B$，$f\in S$，则 $f^p\in S$，$p=1,2,\cdots$，因此

$$|f(x)|^p\leqslant M_x\|f\|_A^p.$$

由于 $M_x^{1/p}\to1(p\to\infty)$，则有 $|f(x)|\leqslant\|f\|_A$，$x\in\hat{A}_S$.

引理 1 设 K 紧致，$M>0$，$\varepsilon>0$，则对 $a\notin\hat{K}$，存在 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得

$$f(a)=M,\quad\|f\|_K<\varepsilon.$$

证 设 $g\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得 $|g(a)|>\|g\|_K$，则对足够大的整数 p，我们可取 $f=M(g/g(a))^p$.

引理 2 设 $A\subset\Omega$ 是一个子集使得对任意 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 有 $\|f\|_A<\infty$，则存在一个紧致集合 $K\subset\Omega$ 使得 $A\subset\hat{K}$.

证 设结果不成立. 令 $\{K_p\}_{p=0,1,\cdots}$ 是 Ω 中的紧致集合序列而且 $K_p\subset\mathring{K}_{p+1}$，$\bigcup K_p=\Omega$. 由于 $A\not\subset\hat{K}_p$，所以存在

$$x_p\in A-\hat{K}_p.$$

如果必要，以一个子序列代替 $\{K_p\}$，我们可设 $x_p\in K_{p+1}$. 令 $f_0\in$

$\mathscr{H}(\Omega)$ 使得

$$|f_0(x_0)|>1, \quad \|f_0\|_{K_0}<1.$$

用归纳办法，令 $f_p\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得

$$(1) \qquad |f_p(x_p)|>p+1+\sum_{q=0}^{p-1}|f_q(x_p)|, \quad \|f_p\|_{K_p}<2^{-p},$$

则级数 $\sum_{p=0}^{\infty}f_p=f$ 在 Ω 的每一个紧致子集上一致收敛，所以 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$. 而且由(1)得

$$|f(x_p)|\geqslant|f_p(x_p)|-\sum_{q=p+1}^{\infty}|f_q(x_p)|$$

$$-\sum_{q=0}^{p-1}|f_q(x_p)|\geqslant p+1-\sum_{q=p+1}^{\infty}|f_q(x_p)|,$$

现在对 $q>p$ 有 $x_p\in K_q$. 因此 $|f_q(x_p)|\leqslant\|f_p\|_{K_q}<2^{-q}$. 所以

$$\sum_{q=p+1}^{\infty}|f_q(x_p)|<1.$$

因此有 $|f(x_p)|>p$. 由于 $x_p\in A$, $p=0,1,2,\cdots$, 在 A 上 f 不是有界的，因而 $\|f\|_A=\infty$，与我们的假设矛盾.

全纯凸

引理 3 下述两个论断是等价的.

(a) 对任意 $K\subset\Omega$, K 紧致，则 $\hat{K}$ 也紧致.

(b) 对任意在 Ω 内无极限点的（无穷）序列 $\{x_\nu\}$，存在 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得 $\{f(x_\nu)\}$ 是无界的.

证 (a) $\Rightarrow$ (b). 设 $\{x_\nu\}$ 是一个序列，在 Ω 内无极限点，则对任何紧致的 K, $\{x_\nu\}\not\subset\hat{K}$. 由引理 2，存在 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得 $\{f(x_\nu)\}$ 是无界的.

(b) $\Rightarrow$ (a). 如果 $\hat{K}$ 不紧致，则存在一个序列 $\{x_\nu\}$, $x_\nu\in\hat{K}$，在 Ω 内无极限点. 设 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得 $\{f(x_\nu)\}$ 是无界的，则 $\|f\|_{\hat{K}}=\infty$. 但由 $\hat{K}$ 的定义，有 $\|f\|_{\hat{K}}=\|f\|_K<\infty$.

引理 3 的条件被满足，我们就称 Ω 是**全纯凸**的.

定义 2 设 $a\in\Omega$. 以 a 为心 r 为半径的多圆柱是一个连通

开集 U，使得 $a\in U$，$p_0|U$ 是到集合 $\{z\in\mathbf{C}^n||z_j-b|_j<r\}$ 上的一个解析同构，这里 $p_0(a)=(b_1,\cdots,b_n)$. 我们记集合 U 为 $P(a,r)$. 最大多圆柱 $P(a,r_0)$ 是以 a 为心的所有这样的多圆柱之和.

引理 4 $P(a,r_0)$是以 a 为心

$$r_0=\sup r$$

为半径的多圆柱，这里上确界是对以 a 为心的所有多圆柱 $P(a,r)$ 取的.

证 只要证明映照

$$p_0:P(a,r_0)\to P=\{z\in\mathbf{C}^n||z_j-b_j|<r_0\}$$

是一一的就够了. [显然 $p_0(P(a,r_0))\subset P$.] p_0 是单的：若 $x,x'\in P(a,r_0)$，则存在一个多圆柱 $P(a,r)$ 包含 x 和 x'，所以 $p_0(x)\neq P_0(x')$. p_0 是满的：若 $z\in p$，则 $\max\limits_j|z_j-b_j|<r_0$，因此存在一个半径为 r 的多圆柱 $P(a,r)$ 而 $|z_j-b_j|<r\leqslant r_0$，所以存在一个点 $x\in P(a,r)$ 使得 $p_0(x)=z$.

到边界的距离的性质

定义 3 以 a 为心的最大多圆柱的半径称为 a 到 Ω 的边界的距离，我们以 $d(a)$ 表示（当依赖于 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 时，相应的记为 $d_{p_0}(a)$）.

引理 5 如果存在一点 $a\in\Omega$，使得 $d(a)=\infty$，则 p_0 是 Ω 到 $\mathbf{C}^n$ 上的一个同构.

证 $d(a)=\infty$ 简而言之这表示存在一个包含 a 的开集 U 使得 $p_0|U$ 是到 $\mathbf{C}^n$ 上的一个同构，这立即得到 $\{x\in\Omega|d(x)=\infty\}$ 是开集. 而且它还是闭的（如果 $x_\nu\in\Omega$，$x_\nu\to x_0$，P 是以 x_0 为心的多圆柱，设 U 是 x_ν 的一个邻域，$x_\nu\in P$，使得 $p_0|U$ 是到 $\mathbf{C}^n$ 上的一个同构，则 $x_0\in U$ 同时 $d(x_0)=\infty$）. 因此，对任意 $x\in\Omega$ 有 $d(x)=\infty$. 这立刻推得 p_0 是一个覆盖. 由于 $\mathbf{C}^n$ 是单连通的，所以 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个同构.

注 可以证明如果存在 $\rho>0$，使得对所有 $x\in\Omega$ 有 $d(x)\geqslant$

ρ，则 p_0 是到 $\mathbf{C}^n$ 上的一个同构.

引理 6 如果 $d<\infty$，则函数 $a\to d(a)$ 在 Ω 上连续.

证 设 $a\in\Omega$，P 是以 a 为心 $\rho>0$ 为半径的最大多圆柱. 设 U 是以 a 为心 $\rho/4$ 为半径的多圆柱. 显然，若 $x\in U$，则 $p_0(P)$ 就包含以 $p_0(x)$ 为心，$\rho-|p_0(x)-p_0(a)|$ 为半径的多圆柱，由此 P 包含以 x 为心，$\rho-|p_0(x)-p_0(a)|$ 为半径的多圆柱. 因而

$$d(x)\geqslant d(a)-|p_0(x)-p_0(a)|.$$

同样有

$$d(a)\geqslant d(x)-|p_0(a)-p_0(x)|.$$

因此对 $x\in U$ 有

$$|d(x)-d(a)|\leqslant|p_0(x)-p_0(a)|.$$

定义 4 若 A 是 Ω 的一个子集，我们令

$$d(A)=\inf_{a\in A}d(a).$$

由于 d 是连续的，如果 K 是紧致集，则 $d(K)>0$.

引理 7 设 $a\in\Omega$，$r_0=d(a)$，而 $P=P(a,r_0)$ 是以 a 为心的最大多圆柱，则 $d(P)=0$.

证 我们以下述注开始. 设 $P=P(x,r)$ 和 $P'=P(x',r')$ 是 Ω 内的两个多圆柱. 令

$$Q=p_0(P)=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z-p_0(x)|<r\},$$
$$Q'=p_0(P')=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|x-p_0(x')|<r'\}.$$

若 $Q\cap Q'\neq\varnothing$，则或者 $P\cap P'=\varnothing$ 或者 p_0 是将 $P\cap P'$ 映为 $Q\cap Q'$ 的同构. 事实上，令 $q=(p_0|P)^{-1}$，$q'=(p_0|P')^{-1}$，则 $q|Q\cap Q'$ 与 $q'|Q\cap Q'$ 是 $Q\cap Q'$（这是连通的）的恒等映照的两个提升，并且在 $p_0(P\cap P')$ 上重合，由第 2 章引理 4，它们处处重合.

现在令 $a\in\Omega$，$P=P(a,r_0)$，$r_0=d(a)$. 设 $d(P)=\rho>0$. 令 $x\in P$，而 $P(x)$ 是以 x 为心 ρ 为半径的多圆柱，令

$$U=\bigcup_{x\in P}P(x).$$

我们断言 $p_0|U$ 是到 $p_0(U)$ 上的一个同构. 只要证明 $p_0|U$ 是单的

就足够了．令 $y\in P(x)$, $y'\in P(x')$ 并设 $p_0(y)=p_0(y')$．设

$$Q(x)=p_0(P(x)),Q(x')=p_0(P(x')),$$

则 $p_0(y)=p_0(y')\in Q(x)\cap Q(x')$．而且 $P(x)\cap P$, $P(x')\cap P$ 分别同构于 $Q(x)\cap Q$, $Q(x')\cap Q$, 这里 $Q=p_0(P)$.

显然,如果 $Q(x)\cap Q(x')\neq\varnothing$, 则 $Q(x)\cap Q'(x')\cap Q\neq\varnothing$. 因此 $P(x)\cap P(x')\cap P\neq\varnothing$. 由上述注记，所以 p_0 是把 $P(x)\cap P(x')$ 映为 $Q(x)\cap Q(x')$ 的同构映照．这表明 $y, y'\in P(x)\cap P(x')$. 由于 $p_0(y)=p_0(y')$ 而 $p_0|P(x)\cap P(x')$ 是单的，这表明 $y=y'$, 因此 $p_0|U$ 是单的.

现在有 $p_0(U)=\bigcup\limits_{z\in Q}Q_z$, 这里 $Q_z=\{w\in\mathbf{C}^n\,|\,|w-z|<\rho\}$, 因此 $p_0(U)$ 包含以 $p_0(a)$ 为心，$R>r_0$ 为半径的多圆柱．这表明 $d(a)\geqslant R>r_0$, 矛盾.

因此 $d(P)=0$.

命题 1 设K是Ω的一个紧致子集，$x_0\in\hat{K}$. 令 $a=p_0(x_0)$, 而令V是以 x_0 为心的多圆柱，$P=p_0(V)$．对任意 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$, 若 $g=f\circ(p_0|V)^{-1}\in\mathscr{H}(P)$, 则级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\frac{D^\alpha g(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$$

在多圆柱 $\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z-a|<d(K)\}$ 收敛.

证 设 $0<r<d(K)$. 对任何 $x\in K$,令 $Q(x)$是以 x 为心 r 为半径的多圆柱，$K'=\bigcup\limits_{x\in K}\overline{Q(x)}$, 则 K' 紧致．设 $M=\|f\|_{K'}$. 对 $f|Q(x)$ 应用 Canchy 不等式,我们有 $|D^\alpha f(x)|\leqslant M\cdot\alpha!\,r^{-|\alpha|}$, $x\in K$, 因此 $\|D^\alpha f\|_K\leqslant M\cdot\alpha!\,r^{-|\alpha|}$, 由 $\hat{K}$ 的定义,因而我们有

$$\|D^\alpha f\|_{\hat{K}}\leqslant M\cdot\alpha!\,r^{-|\alpha|}.$$

由于 $x_0\in\hat{K}$, 这表明 $|D^\alpha g(a)|\leqslant M\cdot\alpha!\,r^{-|\alpha|}$. 因此对 $|z-a|<r$ 级数 $\Sigma D^\alpha g(a)\cdot(\alpha!)^{-1}(z-a)^\alpha$ 收敛．由于 $r<d(K)$ 是任意的,命题得证.

Cartan-Thullen 的第一基本定理

定理 1 (H. Cartan-P. Thullen) 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个全纯域，

则对任意紧致集 $K\subset\Omega$，我们有

$$d(K)=d(\hat{K}).$$

证 显然，$d(K)\geqslant d(\hat{K})$. 如大于号成立，则存在 $x_0\in\hat{K}$ 使得 $d(x_0)=r_0<\rho=d(K)$. 令 $a=p_0(x_0)$，令

$$P_0=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z-a|<d(K)=\rho\}.$$

设 Ω_0 是 $p_0^{-1}(P_0)$ 的包含 x_0 的连通分量. 我们断言 $p_0|\Omega_0$ 是单的. 事实上，由命题 1 可得，对任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$，存在 $g_f\in\mathscr{H}(P_0)$ 使得 $f|\Omega_0=g\circ p_0$. 另一方面，由 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个全纯域，由第 6 章引理 2 的系 1 可得知 $\mathscr{H}(\Omega)$ 分离 Ω 的点. 由于 $g_f\circ p_0$ 在任意的适合 $p_0(x)=p_0(y)$ 的两点 $x,y\in\Omega_0$ 取相同的值，这就推得 $p_0|\Omega_0$ 是单的.

设 $r_0<r<\rho$，$\Omega_1=\{x\in\Omega_0\,|\,|p_0(x)-a|<r\}$，同时令 Y 是 Ω 和 P 的不连通和，这里 $P=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z-a|<r\}$. 我们在 Y 定义一个等价关系，$z\in P$ 至多等价于一个点 $x\in\Omega$，当且仅当 $x\in\Omega_1$ 和 $p_0(x)=z$. 设 X 是 Y 在这等价关系下的商，则 x 是 Hausdorff 的，而且 Y 到 $\mathbf{C}^n$ 中的映照就是 p_0 在 Ω 上的映照，同时 P 在 $\mathbf{C}^n$ 中的内射诱导了一个局部同胚 $p:X\to\mathbf{C}^n$. 而且 Ω 在 Y 中的内射诱导了一个映照 $\varphi:\Omega\to X$ 使得 $p\circ\varphi=p_0$. 我们断言对任一 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$，存在 $F_f\in\mathscr{H}(X)$ 使得有 $F_f\circ\varphi=f$. 事实上，由于存在 $g_f\in\mathscr{H}(P_0)$ 使得 $f|\Omega=g_f\circ p_0$（命题 1），我们在 Y 上定义一个函数 $G_f:G_f|\Omega=f$，$G_f|P=g_f|P$. 这就诱导了一个 $F_f\in\mathscr{H}(x)$，显然有 $F_f\circ\varphi=f$. 因而 $p:x\to\mathbf{C}^n$，$\varphi:\Omega\to x$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的 $\mathscr{H}(\Omega)$-扩张. 由假定，$p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个全纯域，因而 φ 是一个解析同构. 特别，因为 X 包含一个以 $\varphi(x_0)$ 为心 r 为半径的多圆柱，Ω 包含一个以 x_0 为心 r 为半径的多圆柱，这与我们的假定 $r>r_0=d(x_0)$ 相矛盾. 这就证明了定理.

同样的理由可以证明以下的定理.

定理 1′ (Cartan-Thullen) 设 $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$ 是 $\mathscr{H}(\Omega)$ 的子代数并包含函数 $p_1,\cdots,p_n$，$(p_0=(p_1,\cdots,p_n))$ 同时在微分下是封闭的(即如果 $f\in S$，则 $D^\alpha f\in S$ 对所有 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 成立). 如果 Ω 到

它的全纯的 S-包络的自然映照是一个同构，则对任意紧致的 $K\subset\Omega$ 有 $d(K)=d(\hat{K}_S)$.

系 如果 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中一个开集而且是一个全纯域，p_0 是 Ω 到 $\mathbf{C}^n$ 中的内射，则对任何紧致集 $K\subset\Omega$, $\hat{K}$ 也是紧致的.

证 显然 $\hat{K}$ 在 Ω 是闭的. 而且由于 $d(K)=d(\hat{K})$，所以 $\hat{K}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 是闭的（因为 $\hat{K}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的闭包不和 $\partial\Omega$ 相遇）. 更有进者，$\hat{K}$ 是包含于多圆柱 $\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z|\leqslant\rho\}$ 内，这里 $\rho=\max\limits_j\|z_j\|_K$，所以 $\hat{K}$ 是有界的. 因而 $\hat{K}$ 紧致.

Cartan-Thullen 的第二基本定理

定理 2（Cartan-Thullen） 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 具有这样的性质即对任何紧致集 $K\subset\Omega$，我们有 $d(\hat{K})>0$，进一步假定 $\mathscr{H}(\Omega)$ 分离 Ω 的点. 如果存在 $g\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得 $p:x\to\mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to x$ 是 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的全纯 S-包络，这里 $S=\{g\}$ 是仅包含一个元素 g 的集合，则 φ 是一个同构. 换言之，Ω 是 g 的存在区域.

在开始证明之前，我们给一个定义.

定义 5 设 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$, $f\not\equiv0$. 若 $a\in\Omega$，则 f 在 a 点的零点的阶定义为使得对所有 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 而且 $|\alpha|<k$ 有 $D^\alpha f(a)=0$ 成立的最大整数 $k\geqslant0$. 我们记它为 $\omega(f,\alpha)$.

注意，函数 $a\longmapsto\omega(f,a)$ 在 Ω 是上半连续的. 特别，它在 Ω 的任一紧致子集上是有界的.

定理 2 的证明　第 1 部分 我们证明下列叙述.

设 $\{x_\nu\}$ 是一个在 Ω 内稠的序列，令 P_ν 是以 x_ν 为心的最大多圆柱，则存在 $g\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得

(a) g 在每一个 P_ν，有任意阶的零点.

(b) 存在一个稠集 $E\subset\Omega$，使得 $p_0^{-1}p_0(E)=E$ 同时使得 g 分离 E 的点.

为了证明这点，我们如下进行. 考虑序列

$$P_1,P_1,P_2,\ P_1,P_2,P_3,\ P_1,P_2,P_3,P_4,\cdots$$

（最本质的一点是每一个 P_k 在这序列中出现无限多次）. 我们以 Q_p 表示这个序列中的第 p 个多圆柱. 令 $\{K_p\}$ 是 Ω 的紧致子集的

序列使得 $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$，$\cup K_p = \Omega$，则由假定 $d(\mathring{K}_p) > 0$. 因而由引理 7 有 $Q_p \not\subset \hat{K}_p$. 设 $y_p \in Q_p - \hat{K}_p$. 由引理 1，存在 $F_p \in \mathscr{H}(\Omega)$ 使得

$$F_p(y_p) = 1, \quad \|F_p\|_{K_p} < 2^{-p}.$$

令

$$h(x) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - F_p(x))^p. \tag{2}$$

由于对 $q > p$ 及 $x \in K_p$ 有

$$|(1 - F_q(x))^q - 1| \leqslant q\|F_q\|_{K_p} < q2^{-q},$$

所以乘积在每一个 K_p 上一致收敛. 由于 $\cup \mathring{K}_p = \Omega$，而且 Ω 的任一紧致子集包含于某个 K_p，因此，$h \in \mathscr{H}(\Omega)$*). 而且，$h(x) \not\equiv 0$ (例如，如果 $x \in K_1$，对所有 p 有 $|F_p(x)| < \frac{1}{2}$，因此，在这个绝对收敛的乘积中在 $x \in K_1$，则不存在为零的项)，同时 h 在 y_p 至少是 p 阶零点. 由于对 p 的无穷多个值有 $P_\nu = Q_p$，因而 h 在每一个 P_ν 有任意阶的零点.

令 $A = \{x \in \Omega | h(x) = 0\}$，则 A 是 Ω 中的无处稠的闭集. 设 $B = p_0(A) \subset \mathbf{C}^n$. 我们断言 $\mathbf{C}^n - B$ 在 $\mathbf{C}^n$ 是稠的. 事实上，如果 $\{U_\nu\}$ 是 Ω 中的开集的序列使得 $p_0|U_\nu$ 是到 $\mathbf{C}^n$ 中一个开集上的同胚，同时 K'_ν 是 U_ν 中的紧致集使得 $\cup K'_\nu = \Omega$，则 $B = \cup p_0(A \cap K'_\nu)$. 每一个 $p_0(A \cap K'_\nu)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的无处稠的紧致集，所以由 Baire 定理，$\mathbf{C}^n - B = \cap(\mathbf{C}^n - p_0(A \cap K'_\nu))$ 是稠密的. 设 $\{z_\nu\}$ 是在 $\mathbf{C}^n$ 中稠的序列，$z_\nu \notin B$. 令 $E = \cup p_0^{-1}(z_\nu)$，则 E 在 Ω 中稠，$E \cap A = \varnothing$ 和 $p^{-1}p(E) = E$. 而且由 Poincare-Volterra 定理(第 2 章) E 是可数的.

现在考虑具有紧致收敛拓扑空间 $\mathscr{H}(\Omega)$，[即 $\mathscr{H}(\Omega)$中的序列如果它在 Ω 的每一个紧致子集上一致收敛，则它就收敛]. 在这种拓扑下，$\mathscr{H}(\Omega)$ 是一个完备的度量空间（事实上，它是具有紧

---

*) 原书误为 “$f \in \mathscr{H}(\Omega)$”.——译者注

致收敛拓扑的连续函数空间的一个闭子空间).

设 $H_0=\{f\circ h \mid f\in \mathscr{H}(\Omega)\}$, 这里 h 是上面(2)所构造的函数. 令H是H_0的在 $\mathscr{H}(\Omega)$ 的闭包, [事实上,可以证明 H_0 是闭的,但这点并不重要.]则显然, 任一 $F\in H$, $F\not\equiv 0$, 那么F在每一个P_v中有任意阶的零点.

对任何两个元素 $x, x'\in E$, $x\neq x'$, 以 $H(x, x')$ 表示集合 $\{F\in H \mid F(x)\neq F(x')\}$. 显然, $H(x, x')$在H是开的. 我们断言它在H稠. 首先,存在 $G\in H$, 使得 $G(x)\neq G(x')$ [如果 $h(x)\neq h(x')$, 则没有什么需要证明. 如果 $h(x)=h(x')$, 则由于 $E\cap A=\phi$, $h(x)\neq 0$, 所以如果 $f\in \mathscr{H}(\Omega)$ 分离x及 x', 则 $G=fh\in H$ 亦分离 x, x']. 设 $F\in H$, $F\notin H(x, x')$, 则对所有 $\varepsilon\neq 0$, 有 $F+\varepsilon G\in H(x, x')$, 因此, $F\in \overline{H(x,x')}$. 由此 $H(x, x')$在H中稠.

现在,H是一个完备度量空间的闭子空间,它也是一个完备的度量空间. 由于E是可数的,所以

$$\bigcap_{\substack{x,x'\in E\\ x\neq x'}} H(x, x')=H'$$

在H稠密, 更不是空集,若 $g\in H'$, 则g满足定理2的证明中第1部分的(a)和(b).

定理2证明 第2部分 我们现在证明如果g满足第1部分的(a)和(b), $S=\{g\}$, 同时 $p:X\to \mathbf{C}^n$, $\varphi:\Omega\to X$ 是 $p_0:\Omega\to \mathbf{C}_n$ 的全纯S-包络, 则φ是一个解析同构. 由于在任何情况下φ是一个局部的解析同构,只要证明φ是双方一一的就够了.

(i) φ 是单的 若我们把X同 $\mathscr{O}=\mathscr{O}(s)$ 的一个连通分支恒同起来,可以看出φ是单的充要条件是下列叙述成立:

若 $x, y\in \Omega$, $p_0(x)=p_0(y)$ 同时U与V分别是x, y的充分小的连通邻域,使得 $p_0(U)=p_0(V)=W$, 则在W有

$$g\circ(p_0|U)^{-1}\not\equiv g\circ(p_0|V)^{-1}.$$

但若 $a\in W$, $(p_0|U)^{-1}(a)=\xi$, $(p_0|V)^{-1}(a)=\eta$, $\xi, \eta\in E$,

我们有 $g(\xi)\neq g(\eta)$. 因此,上述条件满足,所以 φ 是单的.

(ii) φ 是满映照　设 φ 不是满映照,令 $Y=\varphi(\Omega)$, 则 Y 是 X 中的一个开集, $Y\neq X$. 令 $x_0\in\overline{Y}-Y$ ($\overline{Y}$ 是 Y 在 X 中的闭包), 设 P 是以 x_0 为心 ρ 为半径的在 X 内的多圆柱. 令 Q 是以 x_0 为心 $\rho/4$ 为半径的多圆柱,同时令 $x_\nu\in\Omega$ 使得 $\varphi(x_\nu)\in Q\cap Y$ (注意 $\{x_\nu\}$ 在 Ω 中稠),则显然, $\varphi(x_\nu)$在 X 相对紧致.如果 $G\in\mathscr{H}(x)$ 使得 $G\circ\varphi=g$, 则 G 在 $\varphi(P_\nu)$ 上的零点的阶是有界的, 这与第 1 部分的 (a) 相矛盾. 由此, φ 是一个满映照,定理得证.

系 1　如果 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是全纯域, 则它也是 Ω 中一个元素 g 的存在域[这表明, 对任何 $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$, 则 $\mathscr{O}(S)$ 的任一连通分量解析同构于 $\mathscr{O}$ 的连通分量].

这可得自定理 1 与 2 以及第 5 章引理 2 的系 2.

系 2　如果 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 使得对任何紧致集 $K\subset\Omega$ 有 $d(\hat{K})>0$ 同时 $\mathscr{H}(\Omega)$ 分离 Ω 的点,则 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个全纯域,同时

$$d(K)=d(\hat{K}).$$

系 3　如果 $\mathscr{H}(\Omega)$ 分离 Ω 的点, 对任何紧致集 $K\subset\Omega$, $\hat{K}$ 是紧致的, 则 Ω 是全纯域. 特别, $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是全纯域的充要条件是对任何紧致集的 $K\subset\mathbf{C}^n$, $\hat{K}$ 是紧致的.

定义 6　给定 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 和 $S\subset\mathscr{H}(\Omega)$, 我们称 Ω 是 S-凸的,如果对每一个紧致集 $K\subset\Omega$, 都有 $\hat{K}_S$ 也是紧致的.

命题 2　设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是全纯域, K 是 Ω 内的紧致集. 对任何 $A\subset\Omega$;而且 $d(A)>0$,令 $A(r)=\bigcup\limits_{x\in A}\overline{P}(x,r)$. 这里 $0<r<d(A)$, $\overline{P}(x,r)$ 是以 x 为心 r 为半径的多圆柱在 Ω 中的闭包, 则对 $0<r<d(K)$, 我们有 $L=K(r)$ 是紧致的,同时

$$\hat{K}(r)\subset\hat{L}.$$

证　注意,由于 $d(K)=d(\hat{K})$ 所以 $\hat{K}(r)$ 是有意义的, 假定 $\hat{K}(r)\subset\hat{L}$ 不成立,设 $x_0\in\hat{K}(r)$, $x_0\notin\hat{L}$, 则存在 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 使得

$$f(x_0)=1,\quad \|f\|_{K(r)}<1.$$

函数 $g=1/(1-f)$ 在 $\hat{L}$ 的一个邻域 U 全纯. 令 $\rho>0$, $r<$

$\rho < d(K)$ 使得以 $a \in K$ 为心 ρ 为半径的多圆柱 $P(a, \rho)$ 的闭包在 U 内. 由 Cauchy 不等式得到

$$|D^\alpha g(a)| \leqslant M\rho^{-|\alpha|} \cdot \alpha!, \quad M = \|g\|_{K(\rho)}.$$

所以

$$\|D^\alpha g\|_K \leqslant M\rho^{-|\alpha|} \cdot \alpha!$$

现在, $g = \lim_{N\to\infty} g_N$, $g_N = \sum_{p=0}^{N} f^p \in \mathscr{H}(\Omega)$, 同时这极限在 $\hat{L}$ 的邻域上是一致的(因为 $\|f\|_{K(r)} < 1$). 因而 $D^\alpha g_N$ 在 $\hat{L}$ 的一个邻域上一致收敛于 $D^\alpha g$. 特别,对 $b \in \hat{K}$, 我们有

$$|D^\alpha g(b)| = \lim_{N\to\infty} |D^\alpha g_N(b)| \leqslant \lim_{N\to\infty} \|D^\alpha g_N\|_K = \|D^\alpha g\|_K,$$

所以

$$\|D^\alpha g\|_{\hat{K}} \leqslant M\rho^{-|\alpha|} \cdot \alpha!.$$

对任何 $b \in \hat{K}$ 以及 $r < \rho' < \rho$, 我们立即得到 g 的 Taylor 级数

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^m} \frac{D^\alpha g(b)}{\rho!} (p_0(x) - p_0(b))^\alpha,$$

在 $P(b, \rho')$ 上一致收敛于 g.
特别,如果选取 $b \in \hat{K}$, $\rho' > r$,使 $x_0 \in P(b, \rho')$ (注意, $x_0 \in \hat{K}(r)$), 则函数 g 能全纯开拓到 $P(b, \rho')$, 从而开拓到 x_0 的一个邻域, 这是不可能的. 这个矛盾表明 $\hat{K}(r) \subset \hat{L}$.

系 如果 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是全纯域, K_0, K_1 都是紧致集,而且 $K_0 \subset \mathring{K}_1$, 则我们有

$$\hat{K}_0 \subset (\hat{K}_1)^0.$$

证 选取 r 如此小,使得 $K_0(r) \subset K_1$, 则由命题 2 有

$$\hat{K}_0(r) \subset \hat{K}_1.$$

显然, $\hat{K}_0$ 是包含于 $\hat{K}_0(r)$ 的内部,故而得证.

命题 3 设 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个连通域, 同时 $p: X \to \mathbf{C}^n$, $\varphi: \Omega \to X$ 是它的全纯包. 令 $\{K_p\}$ 是 Ω 中的紧致集的序列, 使得 $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$, $\cup K_p = \Omega$. 令 $L_p = \varphi(K_p)$ 和 $Q_p = \hat{L}_p$ (关于 X), 则

$$Q_p \subset \mathring{Q}_{p+1}, \quad \cup Q_p = X.$$

证 由于φ是开的，我们有 $L_p\subset\mathring{L}_{p+1}$. 而且由第6章的引理1的系，可知 $p:X\to\mathbf{C}^n$ 是全纯域，因而由上述命题2的系有 $Q_p\subset\mathring{Q}_{p+1}$. 特别，$Y=\cup Q_p$ 在X内是开的. 设 $Y\neq X$，令 $x_0\in\overline{Y}-Y$，$\{y_\nu\}$是Y内的一个序列，而且 $y_\nu\to x_0$。现在，任一紧致集 $L\subset Y$，则对某个p有 $L\subset Q_p$. 由于$\lim\limits_{\nu\to\infty}y_\nu=x_0\notin\cup Q_p$，这说明不存在包含所有$y_\nu$的$Q_p$. 而且，如果 $L\subset Q_p$，则$\hat{L}$（关于Y）也包含在Q_p内（注意，在Y上的任一全纯函数g能解析开拓到X；只要找一个 $G\in\mathscr{H}(x)$ 使得 $G\circ\varphi=g\circ\varphi$ 就行了）. 因此，由引理2，存在 $g\in\mathscr{H}(Y)$ 使得$\{g(g_\nu)\}$不是有界的. 如果$G\in\mathscr{H}(x)$ 是使得 $G|Y=g$，则 $\{G(g_\nu)\}$ 是无界的. 这是不可能的，因为 $y_\nu\to x_0$. 这个矛盾表明 $\cup Q_p=X$.

系1 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n,p:X\to\mathbf{C}^n,\varphi:\Omega\to X$ 如上述，则对任何紧致集 $K\subset X$，存在一个紧致集 $L\subset\Omega$ 使得$K\subset\mathring{Q}$，这里

$$Q=\varphi(L).$$

系2 设$\{f_\nu\}$是在Ω上全纯的函数序列，令 $F_\nu\in\mathscr{H}(X)$使得 $F_\nu\circ\varphi=f_\nu$. 如果$\{f_\nu\}$在Ω的紧致子集上一致收敛，则$\{F_\nu\}$在X的紧致子集上一致收敛.

系3 对$\mathscr{H}(\Omega)$和$\mathscr{H}(X)$ 上赋以紧致集上一致收敛拓扑，则映照 $\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(\Omega)$; $F\longmapsto F\circ\varphi$ 是$\mathbf{C}$-代数的拓扑同构.

应用和例子

现在我们给出这些结论的某些应用.

设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 和 $p_0':\Omega'\to\mathbf{C}^{n'}$ 分别是$\mathbf{C}^n$和$\mathbf{C}^{n'}$上的连通域，令 $p:X\to\mathbf{C}^n,\varphi:\Omega\to X$ 和 $p':X'\to\mathbf{C}^{n'}$，$\varphi':\Omega'\to X'$ 分别是它们的全纯包，则映照

$$q_0:\Omega\times\Omega'\to\mathbf{C}^{n+n'},\ q_0=p_0\times p_0':(x,x')\longmapsto(p_0(x),p_0'(x'))$$

是$\mathbf{C}^{n+n'}$上的连通域. 类似的，$q=p\times p':X\times X'\to\mathbf{C}^{n+n'}$ 是 $\mathbf{C}^{n+n'}$ 上的域，和 $\phi=\varphi\times\varphi':\Omega\times\Omega'\to X\times X'$ 是一个局部同构.

命题4 $q:X\times X'\to\mathbf{C}^{n+n'}$，$\phi:\Omega\times\Omega'\to X\times X'$ 是$q_0:\Omega\times$

$\Omega' \to \mathbf{C}^{n+n'}$ 的全纯包.

证 令 K, K' 分别在 X, X' 内紧致，$L = K \times K'$. 我们断言 $\hat{L} \subset \hat{K} \times \hat{K}'$. 事实上，如果 $x \notin \hat{K}$，则存在 $f \in \mathscr{H}(x)$ 使得 $|f(x)| \geqslant 1$, $\|f\|_K < 1$. 因此，如果定义 $F(y, y') = f(y)$，则 $F \in \mathscr{H}(X \times X')$，而且有性质

$$|F(x, x')| \geqslant 1, \quad \|F\|_{K \times K'} < 1,$$

所以 $(x, x') \notin \hat{L}$. 如果 $x' \notin \hat{K}'$，则用类似的道理论述. 显然我们有 $d_q(\hat{K} \times \hat{K}') \geqslant \min(d_p(\hat{K}), d_{p'}(\hat{K}')) > 0$（由定理 1）. 而且，$\mathscr{H}(X \times X')$ 显然分离 $X \times X'$ 的点. 因此，由定理 2 的系 2，可知 $q: X \times X' \to \mathbf{C}^{n+n'}$ 是全纯域. 为了完成定理的证明，只要说明 $X \times X'$ 是 $q_0: \Omega \times \Omega' \to \mathbf{C}^{n+n'}$ 的一个 $\mathscr{H}(\Omega \times \Omega')$-扩张. 设 P 是以 $a \in \Omega$ 为心的一个多圆柱，则对任何多圆柱 $P' \subset \Omega'$，$f|P \times P'$ 能展开成一个级数

$$f(x, x') = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} (p_0(x) - p_0(a))^\alpha f'_\alpha(x'), \quad (x, x') \in P \times P'.$$

而且函数 $f'_\alpha(x')$ 是唯一决定的. 因此有

$$f(x, x') = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} (p_0(x) - p_0(a))^\alpha f'_\alpha(x'), f'_\alpha \in \mathscr{H}(\Omega').$$

同时，此级数在 $P \times \Omega'$ 的紧致子集上一致收敛. 设 $K' \subset \Omega'$ 紧致，在 X' 中令 $L' = \varphi'(K')$, $Q' = \hat{L}'$. 设 $g'_\alpha \in \mathscr{H}(X')$ 使得 $g'_\alpha \circ \varphi' = f'_\alpha$. 现在对 $0 < \rho < P$ 的半径，有

$$\|f'_\alpha\|_{K'} \leqslant \text{const} \cdot \rho^{-|\alpha|}.$$

因而 $\|g'_\alpha\|_{Q'} \leqslant \|f'_\alpha\|_{K'} \leqslant \text{const} \cdot \rho^{-|\alpha|}$. 所以级数

$$g_p(x, x') = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} (p_0(x) - p_0(a))^\alpha g'_\alpha(x'), (x, x') \in P \times X'$$

在 $P \times X'$ 的紧致子集上一致收敛（由命题 3 的系 1）. 因此存在 $g_P \in \mathscr{H}(P \times X')$ 使得

$$g_P(x, \varphi'(x')) = f(x, x'), \quad (x, x') \in P \times \Omega'.$$

由扩张的唯一性，所以存在 $g \in \mathscr{H}(\Omega \times X')$ 使得

$$g(x, \varphi'(x')) = f(x, x'), \quad (x, x') \in \Omega \times \Omega'.$$

将 Ω 换为 X', Ω' 换为 Ω,而重复这个论证,我们找到 $h\in\mathscr{H}(X\times X')$ 使得

$$h(\varphi(x),x')=g(x,x'),\quad (x,x')\in\Omega\times X'.$$

显然, $h\circ\phi=f$, 所以 $q:X\times X'\to\mathbf{C}^{n+n'}$, $\phi:\Omega\times\Omega'\to X\times X'$ 是 $q_0:\Omega\times\Omega'\to\mathbf{C}^{n+n'}$ 的一个 $\mathscr{H}(\Omega,\Omega')$-扩张,因而结果得证.

设 $\Omega\in\mathbf{C}^n$ 是 Reinhardt 域, $0\in\Omega$. 令 $B\subset\mathbf{R}^n$ 是集合

$$B=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n|(e^{x_1},\cdots,e^{x_n})\in\Omega\}.$$

我们称 Ω 是对数凸的,如果 B 在 $\mathbf{R}^n$ 中是凸的. 我们称 Ω 是完全的,如果 $z\in\Omega$, $z'\in\mathbf{C}^n$ 以及 $|z_j'|\leqslant|z_j|$, $j=1,\cdots,n$, 就表明了 $z'\in\Omega$.

命题 5 一个包含原点的 Reinhardt 域是全纯域的充要条件是它是对数凸和完全的. 一个 Reinhardt 域的全纯包是包含此 Reinhardt 域的最小对数凸完全 Reinhardt 域.

证 只要证明命题的第一部分.

设 Ω 是一个包含 0 的 Reinhardt 域,而且是全纯域. 设 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$, $f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}a_\alpha z^\alpha$ 是在 0 点的 Taylor 展式. 令 $\Omega_f=\{a\in\mathbf{C}^n|\Sigma\, a_\alpha z^\alpha$ 在 a 的邻域一致收敛$\}$,则

$$\Omega=\bigcap_{f\in\mathscr{H}(\Omega)}\Omega_f.$$

显然,如果 $z\in\Omega$, $z'\in\mathbf{C}^n$ 使得 $|z_j'|\leqslant|z_j|$, 则 $z'\in\Omega_f$ 对所有 f 成立. 因而 Ω 是完全的. 令 $B_f=\{x\in\mathbf{R}^n|(e^{x_1},\cdots,e^{x_n})\in\Omega_f\}$. 只要证对任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$, B_f 是凸的就够了. 现在 B_f 是集合 A_f 的内部[*],而 A_f 是 $\mathbf{R}^n$ 中的这样的点 x 组成的,即存在 $M(x)>0$, 使得对所有 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 有

$$|a_\alpha|e^{\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n}\leqslant M(x).$$

因而

$A_f=\{x\in\mathbf{R}^n|$ 存在 $M(x)>0$ 使得对所有 $a_\alpha\neq0$ 的 α,有

[*] 一个集合 A 的内部,即是指 $\mathring{A}$.——译者注

$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leqslant \log M(x) - \log |a_\alpha|\}$. 后一个集合显然是凸的，因而 B_f 亦然．

为了证明其逆，我们如下进行．设 K 在 Ω 紧致，则存在一个有限集 $S \subset \Omega$ 使得

$$K \subset \bigcup_{a \in S} \{z \in \mathbf{C}^n \,|\, |z_j| \leqslant |a_j|,\ j = 1, \cdots, n\}.$$

显然我们可以假定对 $a \in S$ 没有一个 $|a_j|$ 是 0．设 L 是 $\hat{K}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的闭包．只要证明 $L \subset \Omega$ 就行了．设 $z \in L$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$．令 $i_1, \cdots, i_k$ 是使 $z_i \neq 0$ 的那些指标，则对任何整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geqslant 0$，我们有

$$|z_{i_1}^{\alpha_1} \cdots z_{i_k}^{\alpha_k}| \leqslant \sup_{w \in K} |w_{i_1}^{\alpha_1} \cdots w_{i_k}^{\alpha_k}| \leqslant \sup_{a \in S} |a_{i_1}^{\alpha_1} \cdots a_{i_k}^{\alpha_k}|,$$

此即

$$\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \log |z_{i_\nu}| \leqslant \sup_{a \in S} \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \log |a_{i_\nu}|.$$

由于对所有整数 $\alpha_\nu \geqslant 0$ 成立，因而对所有有理数 $\alpha_\nu \geqslant 0$，亦对所有实数 $\alpha_\nu \geqslant 0$ 成立*)．因为凸集

$$B = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,|\, (e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}) \in \Omega\}$$

在 $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$-平面的投影(记为 B_k)还是凸的，所以集合

$$Q = \bigcup_{a \in S} \{|x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) \in \mathbf{R}^k \,|\, x_{i_1} \leqslant \log a_{i_1}, \cdots, x_{i_k} \leqslant \log a_{i_k}\}$$

的凸包还是在 B_k 中，而对任何实数 $\alpha_\nu \geqslant 0$，适合

$$\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu b_{i_\nu} \leqslant \sup_{a \in S} \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \log a_{i_\nu};\quad b_{i_\nu} \geqslant 0$$

---

*) 由此以下的证明是译者改写的，作者原来的证明是"所以 $(\log|z_{i_1}|, \cdots, \log|z_{i_k}|)$ 在点 $(\log|a_{i_1}|, \cdots, \log|a_{i_k}|)$ 的凸包内；$a \in S$，由于凸集 $B = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbf{R}^n \,|\, (e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}) \in \Omega\}$ 在 $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$-平面上的投影仍是凸集，所以存在一点 $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_k) \in \Omega$，使 $\log|z_{i_\nu}| = \log|\zeta_{i_\nu}|; \nu = 1, \cdots, k$．显然对所有 $j = 1, \cdots, n$ 有 $|z_j| \leqslant |\zeta_j|$，由 $\zeta \in \Omega$ 和 Ω 是完全的，我们有 $z \in \Omega$，因而 $L \subset \Omega$．"这里 $(\log|z_{i_1}|, \cdots, \log|z_{i_k}|)$ 在点 $(\log|a_{i_1}|, \cdots, \log|a_{i_k}|)$；$a \in S$ 的凸包内的断言是不对的，因为几个点的凸包是包含这些点的最小凸集．——译者注

的$(b_{i_1},\cdots,b_{i_k})$ 一定属于Ω的凸包，亦就一定属于 B_s，故必有某个$\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\Omega$，使 $\log|\zeta_{i_1}|=\log|z_{i_1}|,\cdots,\log|\zeta_{i_s}|=\log|z_{i_s}|$，而由$\Omega$是完全的，而且 $|z_1|\leqslant|\zeta_1|,\cdots,|z_n|\leqslant|\zeta_n|$，所以这个属于$L$的$z$在$\Omega$内，因而 $L\subset\Omega$.

设 $B\subset\mathbf{R}^n$，所谓B上的**管状域**是指集合

$$T_B=\{z\in\mathbf{C}^n|(\operatorname{Re}z_1\cdots,\operatorname{Re}z_n)\in B\}.$$

命题 6 设B是$\mathbf{R}^n$中的一个连通开集，$n\geqslant 2$. T_B是B上的管状域，则T_B的全纯包就是$T_{\hat{B}}$，这里 $\hat{B}$ 是B在 $\mathbf{R}^n$ 中的凸包.

我们首先注意有下述引理.

引理 8 任何凸开集 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是一个全纯域.

证 设 $a\in\partial\Omega$，则由于Ω是凸的，所以存在一个函数

$$l(z)=\lambda_1z_1+\cdots+\lambda_nz_n+\lambda,$$

$\lambda,\lambda_j\in\mathbf{C}$，使得对 $z\in\Omega$ 有 $\operatorname{Re}l(z)<0$ 以及 $l(a)=0$. 设K是Ω中的紧致集，所以存在a的一个邻域 U_a，使得如果我们令 $\varphi(z)=\exp(l(z))$，则对任何 $z\in U_a$ 有 $\|\varphi\|_K<|\varphi(z)|$. 特别，$\hat{K}\cap U_a=\varnothing$. 由$\hat{K}$是$\mathbf{C}^n$内的闭集，和 $a\in\partial\Omega$ 是任意的，故$\hat{K}$是紧致的. 所以Ω是一个全纯域.

系 如果 $B\subset\mathbf{R}^n$ 是一个凸开集，则T_B是一个全纯域.

从这个系的观点，为了证明命题 6，只要证明：如果B是连通的，则任何$f\in\mathscr{H}(T_B)$能开拓到$T_{\hat{B}}$.

引理 9 设 $a_0=(1,0,\cdots,0)$ 及 $a_1=(0,1,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^n$，$n\geqslant 2$. 令$A$代表三角形$\{(x_1,x_2,0,\cdots,0),x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_1+x_2\leqslant 1\}$，同时对 $0\leqslant\lambda<1$，令 A_λ 代表三角形 $\{(x_1,x_2,0,\cdots,0\},x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_1+x_2\leqslant\lambda\}$. 设$B$是$\mathbf{R}^n$中包含$A$的一个开集，且$\Omega=T_B$，则对任何$\lambda$，$0\leqslant\lambda<1$，存$M=M_\lambda>0$，使得(若 $K=\{z\in\mathbf{C}^n|\operatorname{Re}z\in\Gamma,|\operatorname{Im}z|\leqslant M\}$)$\hat{K}_{\mathscr{H}(\Omega)}$ 包含A_λ，这里 $\Gamma=\{ta_0|0\leqslant t\leqslant 1\}\cup\{ta_1|0\leqslant t\leqslant 1\}$.

证 令$\varepsilon>0$充分小，令：

$S'_\varepsilon=\{z\in\mathbf{C}^n|z_1+z_2-\varepsilon(z_1^2+z_2^2)=1-\varepsilon,z_3=\cdots=z_n=0\}$

$S_\varepsilon=S'_\varepsilon\cap T_A$. 我们证明对任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$，有

$$\|f\|_{S_\varepsilon} = \|f\|_{S_\varepsilon \cap \Gamma'}, \quad \Gamma' = T_\Gamma.$$

如果我们写 $z_j = x_j + iy_j$，则在 S_ε 上我们有

$$x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - \varepsilon, \ x_1 \geqslant 0,$$
$$x_2 \geqslant 0, \ x_1 + x_2 \leqslant 1.$$

特别，$y_1^2 + y_2^2 \leqslant \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. 而且由于 $0 \leqslant x_1 < 1$, $0 \leqslant x_2 < 1$，因此 S_ε 是紧致的．进而在 S_ε 上除了点 a_0 和 a_1 外，有 $x_1 + x_2 < 1$.

现在假定 $|f|S_\varepsilon|$ 在一点 $\zeta \in S_\varepsilon - \Gamma$ 达到最大值．若 $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, 0, \cdots, 0)$，则在 $\mathbf{C}$ 存在一个函数 $\varphi(u)$ 在 $u=\zeta_0$ 的一个连通邻域 U 全纯，使得 $\varphi(\zeta_0) = \zeta_1$，同时集合 $\{(u, \varphi(u), 0, \cdots, 0)\}$ 是 ζ 在 S_ε 上的一个邻域． 因而 $|f(u, \varphi(u), 0, \cdots, 0)|$ 在 $u = \zeta_0$ 有一个最大值，所以在 U 上是常数．因而在集合 $\{z \in S_\varepsilon - \Gamma'\}$ 上 $|f|S_\varepsilon|$ 有最大模，所以是开的，但显然这集合也是闭的．因而

$$\|f\|_{S_\varepsilon} = \|f\|_{S_\varepsilon \cap \Gamma'}.$$

容易验证，如果 $\lambda < 1$，ε 充分小，则对任何 $x \in A_\lambda$，存在 $y = (y_1, y_2, 0, \cdots, 0)$ 使得 $x \in S_\varepsilon + iy$，$|y| \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. 因而，$|f(x)| \leqslant \|f\|_{(S_\varepsilon + iy)\cap\Gamma'}$. 如果我们令

$$M = 2/\varepsilon, \quad K = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{Re} z \in \Gamma, \ |\operatorname{Im} z| \leqslant M\},$$

则表明

$$\|f\|_{A_\lambda} \leqslant \|f\|_K.$$

所以 $A_\lambda \subset \hat{K}$.

引理 10 设 $a_0, a_1, \Gamma, A_\lambda, A$ 如引理 9．令 B 是 $\mathbf{R}^n$ 中分别包含 $\{ta_0 | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 和 $\{ta_1 | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 的两个开凸集的和．令 $\Omega = T_B$，则任何 $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ 能全纯开拓到 T_B 的一个邻域.

证 设 E 是这种 λ 的集合，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，而且在 $\mathbf{R}^n$ 中存在 A_λ 的一个凸邻域 U 使得任何 $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ 能开拓到 T_U．（注意 $T_U \cap T_B$ 是连通的.）显然 E 是 $[0, 1]$ 中的开集，而且 $0 \in E$，设 $\lambda \in \bar{E}$.

令 $\rho = d_\Omega(\Gamma)$ 是 Γ 到 Ω 的边界的距离． 显然 $\rho > 0$． 令 $\mu \in E$，$|\lambda - \mu| < r < \rho$ 以及令 U 是 A_μ 的一个凸邻域使得任何

$f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 能开拓到 T_U，则 $B'=U\cup B$ 是连通的，$U\cap B$ 亦然．因此，任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 能开拓到 $T_{B'}=\Omega'$，而且 $d_{\Omega'}(\Gamma)\geqslant\rho$．令 $\mu_0<\mu$，$|\lambda-\mu_0|<r<\rho$．由引理 9，存在 $M>0$，使得如果 $K=\{z\in\mathbf{C}^n|\operatorname{Re}z=\Gamma,\ |\operatorname{Im}z|\leqslant M\}$，则 $\hat{K}$（关于 Ω'）包含 A_{μ_0}，由命题 1，任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega')$ 在任意点 $a\in A_{\mu_0}$ 的 Taylor 级数在以 a 为心 ρ 为半径的多圆柱内收敛．考虑函数 $f_y:z\longmapsto f(z+iy)$，$y\in\mathbf{R}^n$，可见对任何 $a\in A_{\mu_0}$，上述结论对 f_y 也成立．因而存在 A_λ 的一个凸邻域 V 使得任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega')$ 能开拓到 T_V．因此 $\lambda\in E$，所以 E 是闭的．因此 $E=[0,1]$，引理得证．

命题 6 的证明 正如前面的注，只要证明：如果 $\Omega=T_B$，则任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$能开拓到 $T_{\hat{B}}$．对此，我们首先证明如果 a，$b\in B$，$l(a,b)$ 表示连结 a 与 b 的闭线段，则存在 $l(a,b)$ 的一个凸邻域 U 和 a 的凸邻域 U_a，b 的凸邻域 U_b，使得对任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$，存在 $F\in\mathscr{H}(T_U)$，它在 T_{U_a} 和 T_{U_b} 上与 f 重合．如果这个性质成立，则我们称 B 能开拓到 $l(a,b)$．

对任何 x_0，x_1，$x_2\in B$，以 $A(x_0,x_1,x_2)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中以 x_0，x_1，x_2 为顶点的闭三角形．由引理 9，如果 B 开拓到 $l(x_0,x_1)$ 和 $l(x_0,x_2)$，则 B 开拓到 $l(x_1,x_2)$．

给定 a，$b\in B$，令 x_0 是 B 中一个固定点，同时选取两条折线分别连结 x_0 与 a 和 x_0 与 b（分别有顶点 $a_0=x_0,a_1,\cdots,a_p=a$ 以及 $b_0=x_0,b_1,\cdots,b_p=b$）．由上面的注记，B 能开拓到 $l(a_1,b_1)$．由于 B 显然能开拓到 $l(a_1,a_2)$，所以 B 能开拓到 $l(b_1,a_2)$．由于 B 能显然开拓到 $l(b_1,b_2)$，所以 B 能开拓到 $l(a_2,b_2)$．继续这一过程，所以 B 能开拓到 $l(a_p,b_p)=l(a,b)$．结论得证．

为了完成定理的证明，现在只要证明：如果 $x\in B$，x 在 $l(a,b)$ 上和 $l(a',b')$ 上，a，b，a'，$b'\in B$，同时 $f\in\mathscr{H}(T_B)$，则由 B 开拓到 $l(a,b)$ 和 $l(a',b')$ 而得到的函数 F 与 F' 在 T_U 上重合（U 是 x 的一个凸邻域）．由上面的注记，则存在在 T_W 上全纯的函数 G，（这里 W 是 $A(a,a',x)$ 的一个凸邻域）使得在 $T_{\{a\}}\cup T_{\{a'\}}$ 的一个邻域内有 $G=f$，在 $T_{\{x\}}$ 的一个邻域内有 $G=F$．同样，

存在 $G' \in \mathscr{H}(T_W)$，使得在 $T_{\{a\}} \cup T_{\{a'\}}$ 的一个邻域内有 $G' = f$，在 $T_{\{x\}}$ 的一个邻域内有 $G' = F'$. 但在 T_W 上有 $G = G'$（因为在 T_W 的一个非空开子集上有 $G = G'$），所以 $F = F'$.

这就证明了命题 6.

注 1. 可以证明，如果 B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个连通开集，$\Omega = T_b$，则我们有下述结果.

对任何紧致集 $K \subset \Omega$，$\varepsilon > 0$ 和 $f \in \mathscr{H}(\Omega)$，存在线性函数

$$l_\nu(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\nu,j} z_j,\quad \lambda_{\nu,j} \in \mathbf{R},$$

以及常数 $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$，$\nu = 1, 2, \cdots, p$ 使得对所有 $z \in K$ 有

$$\left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e^{l_\nu(z)} \right| < \varepsilon.$$

这可视作类似于在 Reinhardt 域上成立的幂级数展开.

2. 在 Reinhardt 域和管状域之间存在一种密切的关系. 命题 5 本质上相当于命题 6 的特殊情况，命题 6 断言对所有具有周期的 $f \in \mathscr{H}(T_B)$（即有一个 $y \in \mathbf{R}^n$，$y = (y_1, \cdots, y_n)$；$y_j > 0$，使得 $f(z) = f(z + iy)$）能扩充为 $\mathscr{H}(T_{\hat{B}})$*) 的元.

3. 上面的那些域 Ω 是对十分小的族 S 的 S-凸域的例子. 命题 5 断言一个包含有 0 点的 Reinhardt 域，如果它是 $\mathscr{H}(\Omega)$-凸，则一定 S-凸，这里的 S 是指单项函数 $z \longmapsto z^\alpha$；$\alpha \in \mathbf{N}^n$ 所成之族. 命题 6 断言，管状域 $\Omega = T_B$，如果是 $\mathscr{H}(\Omega)$-凸，则它一定 S-凸，这里 S 是线性函数 $z \longmapsto \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n$；$\lambda_j \in \mathbf{C}$ 所成之族. 特别这些域对于 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数族是凸的.

在本章最后，我们来介绍使得 $\mathbf{C}$ 中的一个域是全纯域的充分条件.

命题 7 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个有界域，设存在一个紧致集 K，使对任一 $x \in D$ 存在一个解析自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ 和一点 $a \in K$，使得 $\sigma(x) = a$，则 D 是一个全纯域.

---

*) 原书此处为"$\mathscr{H}(T_B)$".——译者注

证 设 $p: X \to \mathbf{C}^n$, $\varphi: D \to X$ 是D的全纯包，则φ是单的，为了证明命题，必须说明φ是满映照．假定这点不成立．令$\{x_\nu\}$是 D 的点序列使得 $\varphi(x_\nu)$ 收敛于一个点 $y_0 \in \partial\varphi(D)$．令 $a_\nu \in K$, $\sigma_\nu \in \mathrm{Aut}(D)$ 使得 $\sigma_\nu(x_\nu) = a_\nu$．令$P$是$X$中的以 y_0 为心的多圆柱，而且在X中相对紧致．由第 6 章命题 3 的系，存在一个X的自同构 $\tilde{\sigma}_\nu$ 使得 $\tilde{\sigma}_\nu \circ \varphi = \sigma_\nu$．而且，由于$D$是有界的，第 6 章命题 2 表明 $p \circ \tilde{\sigma}_\nu$ 是有界的，对 ν 还是一致的．因而由 Cauchy 不等式和中值定理，我们得到下述结果：

设 $P_\rho \subset P$ 是以 y_0 为心 ρ 为半径的多圆柱，则存在一个常数 $C > 0$（不依赖于 ρ）使得如果 $y \in P_\rho$，则我们有

$$|\tilde{\sigma}_\nu(x) - \tilde{\sigma}_\nu(y)| \leqslant C\rho,$$

对所有 $x \in P_\rho$ 成立．令 ρ 充分小，我们得到：存在一个紧致集 $L \subset D$ 使得

$$\sigma_\nu(\varphi^{-1}(P_\rho \cap \varphi(D)) = \sigma_\nu(\varphi^{-1}(P_\rho)) \subset L.$$

现在选取一子序列 $\{\nu_p\} \subset \{\nu\}$ 使得 $\{\sigma_{\nu_p}\}$ 和 $\{\sigma_{\nu_p}^{-1}\}$ 在 D 的紧致子集上一致收敛于映照 $\sigma, \sigma': D \to \mathbf{C}^n$，则$\sigma(\varphi^{-1}(P_\rho)) \subset L$．因而由第 5 章定理 4，我们有 $\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ 和 σ' 是其逆，$\sigma' \circ \sigma = \sigma \circ \sigma' = id$．但是这是不可能的，因为 $\sigma_\nu^{-1}(a_\nu) = x_\nu$，如果 a 是$\{a_\nu\}$在K中的极限点，则 $\sigma'(a) \in D$．而$\{x_\nu\}$在D内无极限点，这个矛盾证明了命题．

系 1 如果Γ是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的一个离散子群使得 D/Γ 是紧致的，则D是全纯域．

系 2 如果D是一个有界齐性域，即对任何一对点 $x, y \in D$，存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ 使得 $\sigma(x) = y$，则D是全纯域．

这里有一个未解决的猜想，如果D是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，且如果存在一个离散群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(D)$ 使得 D/Γ 是紧致的，则D是**齐性的**．关于这个问题还一无所知．

本章的结果，见[1]，[10]，[19]，[11]．

Reinhardt 域的结果是由[27]所引起的．对于这里所给出的形式，见[17]，[19]．

管状域上的定理是 Bochner[3] 给出的. 也见[17].

上面的命题 7 的系 1 是 M. Herve 给出的 (Annales de l'Ecole Normale Sup., 69(1952), 277-302). 在C. L. Siegel 的演讲笔记中有证明 (Analytic functions of several complex variables, Princeton 1948/49).

上述命题 7 的系 2 是 P. Thullen 给出的 (Math. Annalen, 104 (1931), 373-376).

J. Vey (Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1970) 对广泛的一类域即所谓 Siegel 域，证明了上面所提到的猜想. 他的定理是：如果 D 是一个 Siegel 域，Γ 是 Aut(D) 的离散子群使得 D/Γ 紧致，则 D 是齐性的. 他对 $\mathbf{R}^n$ 中的凸集和 D 的仿射变换的离散群也证明了类似的结果；见 Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ᵉ Serie, t.3, 1970, 479-506 和 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. 24, 1970, 641-665.

第 8 章

全纯域：Oka 定理

Hadamard 三域定理和 Schwarz 引理

我们在第 7 章已经看到，$\mathbf{C}^n$ 中一个域 Ω 是全纯域的充要条件是 Ω 是 $\mathscr{H}(\Omega)$-凸的，也就是说当且仅当对任意紧致集 $K\subset\Omega$，有 $\hat{K}$ 也是紧致的. Oka 的一个著名定理表明，同样的结果对 $\mathbf{C}^n$ 上的域 $P_0: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 也是成立的. 这一章我们证明这个定理的一部分，也即全纯域是 $\mathscr{H}(\Omega)$-凸的. 其逆是说（以第 7 章所得结果的观点）如果 $p_0: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathscr{H}(\Omega)$-凸的，则 $\mathscr{H}(\Omega)$ 分离 Ω 的点. 这个事实的所有已有的证明都用到大范围理想论（Oka-Cartan-Serre 的定理 A 与 B），我们不涉及它.

本章所给的证明本质上是属于 E. Bishop 的.

命题 1（Hadamard 三域定理） 令 $p_0: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个连通域，Ω_0，Ω_1 是 Ω 的非空开子集而且

$$\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega.$$

则存在 α，$0<\alpha<1$，使得对任何 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$，我们有

$$\|f\|_{\Omega_1} \leqslant \|f\|_{\Omega_0}^{\alpha}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha}.$$

证 我们首先证明下述结果.

(a) 对 $\rho>0$，令 $B(\rho)=\{z\in\mathbf{C}^n \mid \|z\|^2=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<\rho^2\}$. 设 $0<r_0<r_1<r$. 则对 $f\in\mathscr{H}(B(r))$，我们有

$$\|f\|_{B(r_1)} \leqslant \|f\|_{B(r_0)}^{\alpha}\|f\|_{B(r)}^{1-\alpha}, \qquad \alpha=\frac{\log r-\log r_1}{\log r-\log r_0}.$$

事实上，如果 $z\in B(r_1)$，$z\neq 0$，第 3 章命题 6 应用于函数 $g(u)=f(uz)$ 以及 u-平面上的半径为 $r_0/\|z\|$，$r_1/\|z\|$，$r/\|z\|$ 的三个圆，则有

$$|f(z)|=|g(1)|\leqslant \|f\|_{B(r_0)}^{\alpha}\|f\|_{B(r)}^{1-\alpha}.$$

设给定 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$. 开集 $B\subset\Omega$ 称为以 $a\in B$ 为心 ρ 为半径的球,如果 $p_0|B$ 是到集合

$$\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,\|z-p_0(a)\|<\rho\}$$

之上的同构. 设 $B_0,\cdots,B_n$ 是 Ω 中的球串,使得 $B_0\cap\Omega_0\neq\varnothing$, B_k 的中心包含于 $B_{k-1}(k=1,\cdots,m)$, 而且 $B_k\Subset\Omega$, $\bigcup\limits_{k=1}^{m}B_k\supset\Omega_1$. (由于 Ω 是连通的,所以这种球串是存在的.)

令 $V_k=B_0\cup\cdots\cup B_k$, 同时令 W_k 是中心在 B_k 的球而且使得 $W_0\Subset\Omega_0\cap B_0$, $W_k\Subset V_{k-1}\cap B_k$, $k=1,\cdots,m$. 由上面的 (a), 存在 α_0, $0<\alpha_0<1$, 使得

$$\|f\|_{B_0}\leqslant\|f\|_{W_0}^{\alpha_0}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha_0}$$

对所有 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 成立. 我们将用归纳法证明, 存在 α_k, $0<\alpha_k<1$ 使得

(*) $$\|f\|_{V_k}\leqslant\|f\|_{W_0}^{\alpha_k}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha_k}.$$

假如这已经证明对某个 k 成立. 由上面的 (a), 存在 β, $0<\beta<1$, 使得

$$\|f\|_{B_{k+1}}\leqslant\|f\|_{W_{k+1}}^{\beta}\|f\|_{\Omega}^{1-\beta}.$$

由于 $W_{k+1}\subset V_k$, 这给出

$$\|f\|_{B_{k+1}}\leqslant\|f\|_{V_k}^{\beta}\|f\|_{\Omega}^{1-\beta}\leqslant\|f\|_{W_0}^{\beta\alpha_k}\|f\|_{\Omega}^{\beta(1-\alpha_k)}\|f\|_{\Omega}^{1-\beta}=\|f\|_{W_0}^{\alpha_{k+1}}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha_{k+1}},$$

这里 $\alpha_{k+1}=\alpha_{k\beta}<\alpha_k$. 由于当 α 递减时, $\|f\|_{W_0}^{\alpha}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha}$ 递增. 我们也有

$$\|f\|_{V_k}\leqslant\|f\|_{W_0}^{\alpha_{k+1}}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha_{k+1}},$$

并且我们得到

$$\|f\|_{V_{k+1}}\leqslant\|f\|_{W_0}^{\alpha_{k+1}}\|f\|_{\Omega}^{1-\alpha_{k+1}}.$$

这证明了 (*) 对所有 $k=0,1,\cdots,m$ 成立. 由于 $V_m\supset\Omega_1$ 和 $W_0\subset\Omega_0$, $k=m$ 时上面不等式给出我们的命题.

命题 2 (Schwarz 引理) 设 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个连通域, $\Omega_0\Subset\Omega$ 和 $a\in\Omega_0$. 则存在 τ, $0<\tau<1$, 使得如果 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ 在 a 有一个 p 阶零点(即对 $|\alpha|<p$ 有 $D^\alpha f(a)=0$), 则我们有

$$\|f\|_{\Omega_0}\leqslant\tau^p\|f\|_{\Omega}.$$

对任何$f\in\mathscr{H}(\Omega)$成立.

证 我们首先证明下述结果

设 $B(R)=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,\|z\|<R\}$, $0<r<R$. 若$f\in\mathscr{H}(B(R))$在0点有p阶零点,我们有

$$\|f\|_{B(r)}\leqslant\left(\frac{r}{R}\right)^p\|f\|_{B(R)}.$$

事实上,若 $0<|z|\leqslant r$, $\varphi(u)=f(uz)$, 则 φ 对 $|u|<R/r=\rho$ 全纯. 而且对 $k<p$ 有 $(d/du)^k\varphi(0)=0$. 因而对 $|u|<\rho$, 函数 $\varphi(u)/u^p$ 全纯. 由最大模原理,我们有

$$|f(z)|=\frac{|\varphi(1)|}{|1^p|}\leqslant\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{|u|=\rho-\varepsilon}\left|\frac{\varphi(u)}{u^p}\right|\leqslant\left(\frac{r}{R}\right)^p\|f\|_{B(R)}.$$

现在,为了证明定理, 令 $B_0\Subset B_1$ 是以 a 为中心在Ω内的球, 同时 $B_0\Subset\Omega_0$.

由刚才我们证明的,我们有

$$\|f\|_{B_0}\leqslant\omega^p\|f\|_\Omega,\quad 0<\omega<1.$$

由命题1, 存在 α, $0<\alpha<1$ 使得

$$\|f\|_{\Omega_0}\leqslant\|f\|_{B_0}^\alpha\|f\|_\Omega^{1-\alpha}.$$

这给出

$$\|f\|_{\Omega_0}\leqslant\omega^{\alpha p}\|f\|_\Omega^\alpha\|f\|_\Omega^{1-\alpha}=\tau^p\|f\|_\Omega,\ \tau=\omega^\alpha.$$

规范多项式的性态

定义1 设 $p(z)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha z^\alpha$ 是次数为 N 的 n 个变数的多项式. 我们说 P 是规范的,如果 $\max\limits_\alpha|c_\alpha|=1$.

命题3 设K是$\mathbf{C}^n$内的紧致集,则存在一个常数 $C=C(K,n)>0$, 使得下述事实成立.

设P是一个规范多项式,而且对每一个变量 $z_1,\cdots,z_n$, 其次数$\leqslant d$. 令 $0<t<1$,

$$S=S(t,P,K)=\{z\in K\,|\,|P(z)|\leqslant t^d\}.$$

则

$$m(S)\leqslant Ct^{2/n},$$

这里m表示$\mathbf{C}^n$中的 Lebesgue 测度.

我们需要下述引理.

引理1 令

$$q(t)=t^p+\sum_{k=1}^{p}a_k\ t^{p-k},\ a_j\in\mathbf{R}$$

是实系数的首项系数为1的p次多项式,则

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant +1}|q(t)|\geqslant 2^{-p}.$$

证 设 $g(\theta)=q(\cos\theta)$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$. 现在有

$$g(\theta)=q\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right)=\sum_{k=-p}^{p}c_ke^{ik\theta},\quad c_p=c_{-p}=2^{-p}.$$

因此有

$$2^{-p}=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)e^{-ip\theta}d\theta\right|\leqslant\sup_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}|g(\theta)|=\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}|q(t)|.$$

命题3的证明 第1部分 $n=1$的情形 令 $R>0$ 使得 $K\subset\{z\in\mathbf{C}||z|\leqslant R\}$. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 是P的零点, 而且 $|\lambda_j|<R+1$, $\mu_1,\cdots,\mu_q$ 也是P的零点,但 $|\mu_j|\geqslant R+1$ ($p+q=d$, 而且计算零点时要考虑到零点的重数),则

$$P(z)=a(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)(1-z/\mu_1)\cdots(1-z/\mu_q)$$

$$=\sum_{v=0}^{d}c_vz^v,\quad\max|c_v|=1,a\in\mathbf{C}.$$

令k使得$|c_k|=1$,显然,若A_k表示$|a|(z+R+1)^d$中的z^k的系数, 我们有 $1=|c_k|\leqslant|A_k|=c_d^k(R+1)^{d-k}|a|$ (因为 $|\lambda_j|<R+1$, $|\mu_j|\geqslant R+1>1$). 由于 $c_d^k\leqslant 2^d$. 这给出

$$|a|\geqslant c^{-d},\quad c=2(R+1).$$

由于对 $|z|\leqslant R$ 我们有 $|1-z/\mu_1|\geqslant(R+1)^{-1}$, 这表明 $S(t,P,K)\subset S_1=\{z\in\mathbf{C}||z|\leqslant R,\ |z-\lambda_1|\cdots|z-\lambda_p|\leqslant\tau^d\}$. 这里 $\tau=(R+1)\cdot c\cdot t=c_1t$. 现在若 $c_1t\geqslant 1$, 则有

$$m(S_1)\leqslant\pi R^2\leqslant c_1^2\pi R^2t^2=c_2t^2,\quad c_2=\pi c_1^2R^2.\tag{1}$$

假定 $\tau<1$, 则 $\tau^d\leqslant\tau^p$, 所以

$$S_1\subset S_0=\{z\in\mathbf{C}||z|\leqslant R,\ |z-\lambda_1|\cdots|z-\lambda_p|\leqslant\tau^p\}.$$

令 $\alpha_j = \mathrm{Re}\lambda_j$，令

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leqslant R,\ |x-\alpha_1|\cdots|x-\alpha_n| \leqslant \tau^p\},$$

则A包含 S_0 在实轴 $\mathbf{R}$ 上的投影．令 $m_0(A)$ 表示A在 $\mathbf{R}$ 中的 Lebesgue 测度．显然，A包含一个非空开集，所以 $m_0(A) > 0$．考虑映照 $\varphi:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$，其定义为

$$\varphi(x) = -1 + \frac{2}{m_0(A)} m_0(\{y \in A \mid y \leqslant x\}).$$

显然，$\varphi(x) \geqslant -1$，$\varphi(-R) = -1$，$\varphi(+R) = 1$．而且若 $x < x'$，则有

$$(*) \qquad \varphi(x') - \varphi(x) = \frac{2}{m_0(A)} m_0(\{y \in A \mid x < y \leqslant x'\}) \leqslant \frac{2(x'-x)}{m_0(A)}.$$

特别φ是连续的．而且若I是 $\mathbf{R} - A$ 中的任意开区间，显然φ在I上是常数．因此

$$\varphi(A) = \varphi(\mathbf{R}) = [-1, +1].$$

由于$(*)$，对 $x \in A$，我们有

$$|\varphi(x)-\varphi(\alpha_1)|\cdots|\varphi(x)-\varphi(\alpha_p)| \leqslant \left(\frac{2}{m_0(A)}\right)^p |x-\alpha_1|\cdots|x-\alpha_p| \leqslant \left(\frac{2\tau}{m_0(A)}\right)^p.$$

由于 $\varphi(A) = [-1, +1]$，引理 1 表明

$$2^{-p} \leqslant \sup_{x \in A} |\varphi(x)-\varphi(\alpha_1)|\cdots|\varphi(x)-\varphi(\alpha_p)| \leqslant (2\tau/m_0(A))^p,$$

这给出 $m_0(A) \leqslant 4\tau$．

同样方法可以证明 S_0 在虚轴上的投影 A' 有测度

$$m_0(A') \leqslant 4\tau.$$

因此

$$m_0(S) \leqslant 16\tau^2.$$

这点连同(1)表明

$$m(S(t, P, K)) \leqslant c_3 t^2, \quad c_3 = \max(c_2, 16c_1^2).$$

第 2 部分 一般情形 我们用归纳法．假设此结果在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 已成立．令

$$P(z) = \sum c_\alpha z^\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{n-1}} z'^\beta P_\beta(z_n),\ z' = (z_1, \cdots, z_{n-1}),$$

则存在 β_0 使得 P_{β_0} 是一个规范多项式．令

$$S_1 = \{z \in S(t, P, K) \mid |P_{\beta_0}(z_n)| \leqslant t^{d/n}\},$$

$$S_2 = S(t, P, K) - S_1.$$

从上面的第 1 部分立刻有

$$m(S_1) \leqslant M \cdot c_3 t^{2/n} = c_4 t^{2/n},$$

这里 M 是K在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 上的投影的在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的 Lebesgue 测度．

设 K_0 是K在 z_n-轴上的投影，K' 是K在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 上的投影，令 $\zeta \in K_0$，$(z', \zeta) \in S_2$，而且

$$Q(z') = P(z', \zeta)/P_{\beta_0}(\zeta),$$

则 $|P_{\beta_0}(\zeta)| \geqslant t^{d/n}$，同时 Q 的系数的绝对值的最大值是 $\geqslant 1$．因此

$$S_{2,\zeta} = \{z' \in \mathbf{C}^{n-1} \mid (x, \zeta) \in S_2\} \subset \{z' \in K' \mid |Q(z')| \leqslant t^{d(n-1)/n}\}.$$

由归纳法假定，存在 $c_5 > 0$ 使得 $S_{2,\zeta}$ 在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的 Lebesgue 测度 $\leqslant c_5 t^{2/n}$．因此，由 Fubini 定理

$$m(S_2) \leqslant c_6 t^{2/n}.$$

所以有

$$m(A) = m(S_1 \cup S_2) \leqslant (c_4 + c_6) t^{2/n}.$$

注 (1)．这个不等式本质上是最好的．(2)．从实用看，一个弱得多的不等式（它能用 Jensen 不等式来证得）就够了．我们只要知道当 $t \to 0$ 时，测度

$$m(S(t, P, K)) \to 0,$$

在 P 是一致的（特别，对 P 的次数是一致的）．我们在上面给出的最好的不等式是在于方法上的兴趣（这是由 Bishop 给出的）．

命题 4 设 $p_0: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个连通域，K 是 Ω 中的紧致集．令 $f \in \mathscr{H}(\Omega)$，则存在 θ，$0 < \theta < 1$（仅依赖于K及 f），使得如果 d，D 都是充分大的整数 $D \leqslant d$，则有一个多项式 $P(z_1, \cdots, z_n, w)$，它对 $z_j (j = 1, \cdots, n)$ 的次数 $\leqslant d$，对 w 的次数 $\leqslant D$，使得如果 $p_0(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，$x \in \Omega$，则我们有

$$|P(x_1, \cdots, x_n, f(x))| \leqslant \theta^{d \cdot \delta},\ \delta = D^{1/n},\ x \in K.$$

证 考虑$(z_1,\cdots,z_n,w)$的多项式组成的向量空间V，其中的多项式对$z_j(j=1,\cdots,n)$的次数都$\leqslant d$，对w的次数都$\leqslant D$. V的维数是$(d+1)^n(D+1)$. 若$(a_1,\cdots,a_n,b)\in\mathbf{C}^{n+1}$，同时$N$是一个整数使得$N^n<(d+1)^n(D+1)$，则存在一个规范多项式$P\in V$使得$P(x,f(x))$在点$a$有一个阶数$\geqslant N$的零点[对$(z_1,\cdots,z_n,w)$我们写为$(z,w)$，下同].

只要找到一个具有这种性质的非零的P就行了（这样我们能除以系数的绝对值的最大值）. 对此，我们可取V上的由

$$P\longmapsto\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}P(x,f(x))(a),\quad \alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant N-1$$

给出的线性形式[这些形式最多$N^n(<\dim V)$个]的核的交集中的任一非零元素.

设Ω_0是K的一个连通的邻域，$\Omega_0\Subset\Omega$，同时令$M>0$使得对$x\in\Omega_0$有$|p_0(x)|<M$，$|f(x)|<M$. 若P是一个规范多项式，$P\in V$，我们有

$$|P(p_0(x),f(x))|\leqslant\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}}M^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n+1}}=(1+M)^{nd+D}<C^d$$

(因为$D\leqslant d$)，这里$0\leqslant\alpha_1,\cdots,\alpha_n<d$，$0\leqslant\alpha_{n+1}\leqslant D$. 假如现在$P$是这样选择，使得在$(p_0(x_0),f(x_0))$有一个$N$阶零点，这里$N\geqslant(d+1)(D+1)^{1+n}-1(>dD^{1/n})$，$x_0\in K$（由上面的注，这是可能的，因为我们能选取一个整数$N$使得

$$(d+1)(D+1)^{1/n}-1\leqslant N<(d+1)(D+1)^{1/n}$$
$$=\dim(V)^{1/n},$$

由 Schwarz 引理(命题 2)，我们有

$$|P(p_0(x),f(x))|\leqslant\tau^NC^d\quad(x\in K),$$

这里$0<\tau<1$仅依赖于K和Ω_0. 由于当$d,N\to\infty$时有$C^{d/N}\to1$（因为$N\geqslant dD^{1/n}$），我们能选取θ，$0<\theta<1$，使得对$d\geqslant D\geqslant D_0$有$\tau C^{d/N}<\theta$. 这给出

$$|P(x_1,\cdots,x_n,f(x_n))|<\theta^{d\delta},\quad\delta=D^{1/n},\quad x\in K.$$

引理 2 设$p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$是一个全纯域，但不是$\mathscr{H}(\Omega)$-凸的，

则存在一个紧致集 $K\subset\Omega$ 和一个无穷序列 $\{x_\nu\}$, $x_\nu\in\hat{K}$, 使得下述结果成立:

存在 $a\in\mathbf{C}^n$ 和 $\rho>0$ 使得对所有 ν 有

$$p_0(x_\nu)=a,\qquad d(\{x_\nu\})\geqslant\rho,$$

同时以 x_ν 为心 ρ 为半径的多圆柱 $P(x_\nu,\rho)$ 包含于 $\hat{K}$.

证 设 L 是 Ω 中的紧致集但 $\hat{L}$ 不紧致. 令 $\{y_\nu\}$ 是 $\hat{L}$ 中的点的序列,而它在 Ω 中不存在任何极限点. 由于 $p_0=(p_1,\cdots,p_n)$, 这里 $p_j\in\mathscr{H}(\Omega)$, 我们有

$$|p_j(y_\nu)|\leqslant\|p_j\|_L.$$

因而, 我们可设 $p_0(y_\nu)\to z_0\in\mathbf{C}^n$ (如有必要, 可设是某个子序列 y_{ν_k} 具此性质). 现在由第 7 章定理 1, 我们有

$$d(\hat{L})=d(L)=2\eta>0.$$

令 $\varepsilon>0$ 充分小, $a\in\mathbf{C}^n$, 使得 $|a-z_0|<\varepsilon$, 则多圆柱 $P(y_\nu,\frac{1}{2}\eta)$ 包含点 x_ν 而且 $p_0(x_\nu)=a$, 同时,我们有 $d(x_\nu)\geqslant2\eta-\varepsilon$.

设 $K=L(\eta)$ 是以 L 中的点为心 η 为半径的所有多圆柱的闭包的和集,则 K 是紧致的,同时,由第 7 章命题 2, 有

$$\hat{L}(\eta)\subset\hat{K}.$$

特别, $P(y_\nu,\eta)\subset\hat{K}$, 所以 $P\left(x_\nu,\frac{1}{2}\eta\right)\subset\hat{K}$, 只要令 $\rho=\frac{1}{2}\eta$.

Oka 定理的 Bishop 证明

定理 1 (K. Oka) 任何一个全纯域 $p_0:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathscr{H}(\Omega)$-凸的.

证 (E. Bishop). 设结果不成立,则我们能选取 K 在 Ω 内紧致和 $\{x_\nu\}\subset\hat{K}$ 具有引理 2 所述的性质. 令 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$, d, D 是大的整数而且 $d\geqslant D$. 设 $P_d(z_1,\cdots,z_n,w)$ 是一个规范多项式,它对 z_j 的次数 $\leqslant d$, 对 w 的次数 $\leqslant D$, 使得

$$|P_d(x_1,\cdots,x_n,f(x))|<\theta^{dD^{1/n}},\quad x\in K(0<\theta<1,\ \theta=\theta(K,f)).$$

我们写

$$P_d(z, w) = \sum_{k=0}^{D} P_k^{(d)}(z) w^k.$$

设 $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \mid (z, w) = (p_0(x), f(x)), x \in K\}$，则

$$|P_d(z, w)| < \theta^{d\delta}, \ (z, w) \in X, \ \delta = D^{1/n}.$$

考虑多圆柱

$$Q = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - a| < \rho\} \ (a, \rho \text{ 如引理 2 所述}),$$

令

$$S_{d,D} = \{z \in Q \mid \max_{k=0,\cdots,D} |P_k^{(d)}(z)| \leqslant \theta^{\frac{1}{2}d\delta}\}.$$

由于 P_d 是规范的，所以至少有一个 $P_k^{(d)}$ 也是规范的．因此由命题 3 得

$$m(S_{d,D}) \leqslant c \cdot \theta^{\delta/n}, \quad c = c(Q).$$

特别，如果 D 充分大，以及

$$A_{d,D} = Q - S_{d,D},$$

如果 $d \geqslant D$，D 充分大，则我们有

$$m(A_{d,D}) \geqslant \kappa > 0,$$

这里 κ 不依赖于 d, D．现在我们固定 D，令

$$A_p = \bigcup_{d \geqslant p} A_{d,D}, \quad A = \bigcap_{p=D}^{\infty} A_p,$$

则

$$m(A) \geqslant \kappa.$$

而且，如果 $z \in A$，则存在无穷多个 d 使得 $z \notin S_{d,D}$．因此，对 $z \in A$，存在无穷多个 d 使得

$$\max_{k=0,\cdots,D} |P_k^{(d)}(z)| > \theta^{\frac{1}{2}d\delta}.$$

所以，如果我们令 $c_k^{(d)}(z) = P_k^{(d)}(z) / \max_{l=0,\cdots,D} |P_l^{(d)}(z)|, z \in A$，则有：

(*) 对 $(z, w) \in X$，$z \in A$，对无穷多个 d 有

$$\left| \sum_{k=0}^{D} c_k^{(d)}(z) w^k \right| < \theta^{\frac{1}{2}d\delta}.$$

而且 $\max_k |c_k^{(d)}(z)| = 1$．因此，可以选取一个 d 的子序列使得(*)

成立，所以不妨设 $c_k^{(d)}(z) \to c_k$，$\max\limits_k |c_k| = 1$。所以由(*)得到下述结论：

对 $z \in A$；$(z, w) \in x$，存在 $c_k \in \mathbb{C}(k = 0, \cdots, D)$ 不全为零，$c_k = c_k(z)$，使得

$$\sum_{k=0}^{D} c_k w^k = 0.$$

由 X 的定义，我们得到下述结果：

引理 3 存在具有正测度的子集 $A \subset Q$，使得如果 $z \in A$，则 f 在集合 $p_0^{-1}(z) \cap \hat{R}$ 上最多取 D 个值.

(由上面的注，对 f 在 $p_0^{-1}(z) \cap \hat{R}$ 上的任何值满足方程

$$\sum_{k=0}^{D} c_k w^k = 0,$$

这里 c_k 不全为零.)

设 $\{x_\nu\}$ 如在引理 2 那样是 $\hat{R}$ 中的点的一个无穷序列，则 $P(x_\nu, \rho) \subset \hat{R}$。像第 7 章定理 2 的证明的第 1 部分那样，我们可以找到 $f \in \mathscr{H}(\Omega)$，使得如果 $\nu \neq \mu$，则有 $f(x_\nu) \neq f(x_\mu)$。现在，对 $z \in Q$，令 $y_\nu(z)$ 是 $P(x_\nu, \rho)$ 的点，而且 $p_0(y_\nu(z)) = z$。我们断言：Q 中那些使 f 不能分离 $y_\nu(z)$ 的 z 点所成的集合测度为 0。这就与上述引理 3 矛盾，因此就能完成 K. Oka 定理的证明.

为了证明上述断言，我们令

$$g_\nu = f \circ (p_0 | P(x_\nu, \rho))^{-1},$$

则 $g_\nu \in \mathscr{H}(\Omega)$。设 $A_{\mu,\nu} = \{z \in Q \mid g_\nu(z) = g_\mu(z)\}$，显然，$A_f = \bigcup\limits_{\mu \neq \nu} A_{\mu,\nu}$。而且，由于 $g_\nu(a) = f(x_\nu) \neq f(x_\mu) = g_\mu(a)$，$(\mu \neq \nu)$，$A_{\mu,\nu}$ 是 Q 中的一个不等于 Q 的解析集合，为了证明 A_f 的测度是 0，只要证明每一个 $A_{\mu,\nu}$ 的测度是零。而这点是下述引理的一个直接推论.

引理 4 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开连通集，$h \in \mathscr{H}(\Omega)$，$h \not\equiv 0$，则集合

$$z = z_h = \{z \in \Omega | h(z) = 0\}$$

的测度是 0.

引理 4 的证明 只要证明对任何 $a \in z$，有一个邻域 U 使得 $U \cap Z$ 的测度是 0. 作一个坐标的线性变换，我们可设 $a = 0$，同时，对充分小的 $r > 0$，当 $|z_n| = r$ 时，有

$$|h(0, \cdots, 0, z_n)| \neq 0.$$

这样，对充分小的 $\varepsilon > 0$，当 $|z_j| \leqslant \varepsilon$，$j = 1, \cdots, n-1$，$|z_n| = Y$ 时，我们有 $h(z_1, \cdots z_{n-1}, z_n) \neq 0$. 令 $U = \{z \in \mathbf{C}^n | |z_j| < \varepsilon, j = 1, \cdots, n-1, |z_n| < r\}$，则对固定的 $(z_1^0, \cdots, z_{n-1}^0)$，$|z_j^0| < \varepsilon$，集合

$$U \cap Z \cap \{z_j = z_j^0, j = 1, 2, \cdots, n-1\}$$

是一个有限集合，因而在 $\mathbf{C}$ 中测度为 0. 由 Fubini 定理，立即得到 $U \cap Z$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的测度为 0.

这个引理证明了我们的断言，从而证明了 Oka 定理.

Oka 定理是[22]中所证明的结果的一个特殊情况. 对于 Oka 方法的一种形式，可见[17].

Bishop 方法由他本人给出于[2]中.

第 9 章

有界域的自同构：Cartan 定理

我们在第 5 章已经看到，如果 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界域，则 D 的解析自同构群 $G = \mathrm{Aut}(D)$ 是局部紧致的，而且正常作用于 D. 这一章从事于证明仍是 H. Cartan 给出的一个漂亮的定理，即群 $\mathrm{Aut}(D)$ 有一个 Lie 群结构，且解析作用于 D.

本章的证明是属于 H. Cartan [7] 的.

设 X 是一个 Hausdorff 空间，$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ 是 X 的一个开覆盖. 设 $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$ 是 U_i 到开集 $\Omega_i \subset \mathbf{R}^p$ 上的一个同胚. 假如对任何一对元素 $i, j \in I$，映照

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

是实解析的.

我们称 (X, U_i, φ_i) 是一个 p 维的实解析流形. 但一般我们不提及 (U_i, φ_i).

设 X 和 Y 是分别由 (U_i, φ_i) 及 (V_j, ϕ_j) 所定义的实解析流形. 一个连续映照 $f: X \to Y$ 称为(实)解析的，如果下述事实成立：对任何 $a \in X$ 和 j 使得 $f(a) \in V_j$，存在 a 的一个邻域 U 和一个 i 使得 $U \subset U_i$，$f(U) \subset V_j$，而且使得映照 $\phi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U) \to \phi_j(V_j)$ 是实解析的.

显然，$\mathbf{R}^p$ 有一个实解析流形的典型结构. 实解析流形 X 到 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$) 中的解析映照都称为在 X 上的实（或复）值的实解析函数.

定义 1 设 G 是一个群，同时又是一个实解析流形. 如果由 $(x, y) \longmapsto x \cdot y^{-1}$ 给出的映照

$$G \times G \to G$$

是实解析的，则 G 称为 Lie 群.

向量场与 Lie 定理

开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的一个向量场是指在 Ω 上的实值函数 X_j 所形成的 $X=(X_1,\cdots,X_n)$. 如果 X_j 是 C^∞ 或实解析的，则分别称 X 是 C^∞ 的或实解析的. 如果 f 是 Ω 上的一个 C^∞ 的任意函数，则我们定义:

$$X(f)(x)=\sum_{j=1}^{n} X_j(x)\frac{\partial f}{\partial x^j}(x),\quad x\in\Omega.$$

而且在 $C^\infty(\Omega)$ 上的函数 $f\to X(f)$ 完全决定了 X.

如果 X, Y 是两个 C^∞ 向量场，则我们可以构造第三个向量场

$$Z=[X,Y],$$

其定义为

$$Z(f)=X(Y(f))-Y(X(f)),\ f\in C^\infty(\Omega).$$

容易验证，若 $Z=(Z_1,\cdots,Z_n)$，有

$$Z_j=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k\frac{\partial Y_j}{\partial x_k}-Y_k\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right).$$

我们需要常微分方程理论中的下述结果，我们这里不给以证明. 但其证明，例如可在[21]中找到.

命题 1 设 Ω 是 $\mathbf{R}^p$ 中的一个开集，$\Omega_0\Subset\Omega$ 是开的. 设 X 是在 Ω 上的一个实解析向量场，则存在 $\rho>0$ 和唯一一个实解析映照 $g=g_X:\Omega_0\times I\to\Omega$, $I=\{t\in\mathbf{R}\mid |t|<\rho\}$ 使得

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}=X(g(x,t)),\ g(x,0)=x,\ x\in\Omega_0,\ t\in I.$$

如果 U 是 $\mathbf{R}^q$ 中的开集，$X:\Omega\times U\to\mathbf{R}^p$ 是实解析的，则对 $U_0\Subset U$，存在 $\rho>0$ 使得成立下述结果:

对 $\alpha\in U$，令 $X_\alpha(x)=X(x,\alpha)$, $x\in\Omega$. 则存在一个解析映照

$$g:\Omega_0\times I\times U_0\to\Omega\ (I=\{t\in\mathbf{R}\mid |t|<\rho\}),$$

使得由

$$g_\alpha(x,t)=g(x,t,\alpha)$$

定义的映照 $g_\alpha:\Omega_0\times I\to\Omega$ 满足 $g_\alpha=g_{X_\alpha}$. 而且如果 $t, s, t+s\in I$, 则我们有

$$g_\alpha(g_\alpha(x,t),s)=g_\alpha(x,t+s),$$

对 $\alpha\in U_0$, $x\in\Omega_0$ 和 $g_\alpha(x,t)\in\Omega_0$ 成立.

我们称 $g=g_X$ 是向量场 X 的局部单参数群.

注意,对任何 $f\in C^\infty(\Omega)$, 我们有

$$X(f)(x)=\lim_{t\to 0}t^{-1}\{f\circ g_X(x,t)-f(x)\}.$$

定义 2 设 V 是在开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^p$ 上的向量场组成的有限维向量空间. 我们称 V 是向量场的 Lie 代数, 如果 $X, Y\in V$, 则 $[X, Y]\in V$.

在下面,我们总假定属于 V 的向量场是实解析的.

我们要用到古典 Lie 理论的下述结果. 由于给出一个参考文献,其定理以我们所需的形式表示有些困难,故对这些我们要给以证明.

定理 1 (Lie 定理) 设 V 是在连通开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^p$ 上的实解析向量场的一个有限维 Lie 代数. 设 $\Omega_0\Subset\Omega$. 则存在 V 的原点的一个邻域 U 和一个实解析映照

$$g:\Omega_0\times U\to\Omega,$$

具有下述性质:

设 $g_u:\Omega_0\to\Omega$ 是由 $x\longmapsto g(x,u)$ 所定义的映照.

(i) 对充分接近 0 的 u 和 v, 存在唯一的 $w=w(u,v)\in U$, 使得

$$g_u\circ g_v=g_w$$

在 $\Omega_0\cap g_v^{-1}(\Omega_0)$ 成立.

(ii) 对 $u\in U$, 映照 $t\longmapsto g_{tu}$ ($t\in\mathbf{R}$, 接近 0) 是向量场 u 的单参数群(特别 $g_0=$ 恒等变换)

(iii) 对 u_0, v_0 充分接近于 0, 则映照

$$u\longmapsto w(u,v_0) \text{ 和 } v\longmapsto w(u_0,v)$$

分别是 $0\in V$ 的一个邻域到 v_0 和 u_0 的邻域上的解析同构.

映照 g 称为 V 的**局部变换** Lie **群**.

证 设 $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ 同时令 $X^1,\cdots,X^m$ 是 V 的一组基. 如果 $a\in \mathbf{R}^m$, 则我们以 $X^{(a)}$ 表向量场 $X^{(a)}=\sum_{j=1}^{m} a_j X^j$. 设 $\rho>0$ 和 $I=\{t\,|\,|t|<\rho\}$, 而且存在一个映照

$$\varphi:\Omega_1\times I\times U_1\to\Omega,\quad U_1=\{a\in\mathbf{R}^m\,|\,|a_j|<\rho\},$$

使得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,a)=X^{(a)}(\varphi(x,t,a)),\ \varphi(x,0,a)=x.\ (\text{命题 }1).$$

我们设 ρ 充分小, 使得对 $x\in\Omega_0$, $t\in I$, $a\in U_1$ 有 $\varphi(x,t,a)\in\Omega_1$.

设 $X\in V$, $X=X^{(a)}$ 以及令 $\sigma_{t,X}:\Omega_0\to\Omega$ 是映照

$$\sigma_{t,x}(x)=\varphi(x,t,a).$$

对任何 $Y\in V$, 我们在 Ω_0 上定义一个向量场 $X_{t,*}(Y)$ 如下: 设 $f\in C^\infty(\Omega)$, 则

$$X_{t,*}(Y)(f)=Y(f\circ\sigma_{-t,X})(\sigma_{t,X}(x)).$$

[注意, 如果 $Y=(Y_1,\cdots,Y_p)$ 和 $\sigma_{t,x}=(\sigma_{t,1},\cdots,\sigma_{t,p})$, 则我们有

$$X_{t,*}(Y)=(Z_1,\cdots,Z_p),$$

这里

$$Z_j(x)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\sigma_{-t,j}}{\partial x_k}(y)Y_k(y),\ y=\sigma_{t,X}(x).]$$

设 $Z(t)=X_{t,*}(Y)$, 这里 $X,Y\in V$. 我们断言:

引理 a $\dfrac{dZ(t)}{dt}=X_{t,*}([X,Y])$.

引理 a 的证明 设 $f\in C^\infty(\Omega)$, 则

$$\frac{dZ}{dt}(t_0)(f)=\lim_{t\to0}t^{-1}\{Y(h\circ\sigma_{-t,X})\circ\sigma_{t,X}-Y(h)\}\circ\sigma_{t_0,X},$$

$$h=f\circ\sigma_{-t_0,X}=\lim_{t\to0}\{t^{-1}Y(h\circ\sigma_{-t,X}-h)$$

$$-t^{-1}[Y(h)\circ\sigma_{-t,X}-Y(h)]\}\circ\sigma_{t_0,X}.$$

现在，由于 $\sigma_{t,X}$ 是X的单参数群，我们有

$$\lim_{t\to 0}t^{-1}\{Y(h)\circ\sigma_{-t,x}-Y(h)\}=-X(Y(h)).$$

而且对函数 $\phi=h\circ\sigma_{-t,x}\in C^\infty(I\times\Omega_o)$ 也有此性质．因此对函数

$$F=\begin{cases}t^{-1}(h\circ\sigma_{-t,X}-h)=t^{-1}(\phi(t,x)-\phi(0,x)), & t\neq 0,\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(0,x), & t=0,\end{cases}$$

亦然．因此

$$\lim_{t\to 0}t^{-1}\{Y(h\circ\sigma_{-t,X}-h)=Y(\lim_{t\to 0}t^{-1}(h\circ\sigma_{-t,X}-h))=-YX(h).$$

因此

$$\frac{dZ}{dt}(t_0)(f)=[X,Y](h)\circ\sigma_{t_0,X}=[X,Y](f\circ\sigma_{-t_0,X})\circ\sigma_{t_0,X}$$

$$=X_{t_0,*}([X,Y])(f).$$

引理 b 对 $X,Y\in V$ 和小的t，则 $X_{t,*}(Y)$ 是V的一个元素在 Ω_0 上的限制．

引理 b 的证明 设 $\phi(t)=X_{t,*}(Y)$，$x\in\Omega_0$．显然，$\phi(0)=Y$．现在由引理 a，我们有

$$\frac{d^k\phi}{dt^k}(0)=Y^{(k)},$$

这里

$$Y^{(0)}=Y,\quad Y^{(k)}=[X,Y^{(k-1)}],\quad k\geqslant 1.$$

现在，$Y^{(k)}$ 是Y在V的自同态 A: $Z\to[X,Z]$ 的k次迭代下的象．由于ϕ是实解析的，对充分小的t，我们有

$$\phi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{d^k\phi(0)}{dt^k}=e^{tA}(Y).$$

引理 c 如果 $X,Y\in V$．同时t，s都很小，则我们有

$$\sigma_{s,Y}\circ\sigma_{t,X}=\sigma_{t,X}\circ\sigma_{s,Y'},$$

这里 $Y'=X_{t,*}(Y)$．

引理 c 的证明 设 $\Phi(s,t,x)=\sigma_{-t,X}\circ\sigma_{s,Y}\circ\sigma_{t,X}$． 进行微

分，我们立刻可以验证

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(0, t, x) = X_{t,*}(Y)(x) = Y'(x).$$

因而：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t, x) = \frac{\partial \Phi}{\partial s'}(0, t, \Phi(s, t, x)) = Y'(\Phi(s, t, x)).$$

而且 $\Phi(0, t, x) = x$. 因而 $S \longmapsto \Phi(s, t, x)$ 是向量场 Y' 的单参数群，此即

$$\Phi(s, t, x) = \sigma_{s, Y'}(x).$$

引理 d 设 $X^1, \cdots, X^m$ 是 V 的一组基，$a \in \mathbf{R}^m$ 很小，对 $x \in \Omega_0$ 定义

$$F(a, x) = g_{a_1 X^1} \circ \cdots \circ g_{a_m X^m}(x),$$

同时令 $F = (F_1, \cdots, F_m)$，则存在 0 的一个邻域 U 到 $\mathbf{R}^m$ 中的映照 $u: U \to GL(m, \mathbf{R})$，使得

$$u(0) = I_m \ (m \times m \text{ 的单位矩阵})$$

以及

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}(a, x) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(a) X^j(F(a, x)), \quad u = (u_{ij}).$$

引理 d 的证明 如果 $h \in \mathbf{R}$ 很小，$a' = (a_1, \cdots, a_i + h, \cdots, a_m)$，$1 \leqslant i \leqslant m$，由引理 c 则我们有

$$F(a', x) - F(a, x) = \sigma_{h, Z_i}(y) - y, \quad y = F(a, x),$$

这里 $Z_i = Z_i^{(a)} = X^1_{-a_1, *} \cdots X^{i-1}_{-a_{i-1}, *}(X^i)$.

因而

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}(a, x) = Z_i(y) = Z_i(F(a, x)).$$

而且，映照 $a \to Z_i^{(a)}$ 是解析的. 因此，存在唯一的解析函数 u_{ij} 使得

$$Z_i^{(a)} = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(a) X^j,$$

因而

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}(a, x) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(a) X^j(F(a, x)).$$

而且 $Z_i^{(0)} = X^i$,所以 $u_{ij}(0) = \delta_{ij}(=1$, 当 $i = j$; $=0$,当 $i \neq j)$.
引理 d 得证.

令 $u: U \to GL(m, \mathbf{R})$ 是引理 d 中所构造的矩阵,令 $v: U \to GL(m, \mathbf{R})$ 是其逆: $v(a) = u(a)^{-1}$. 令 v^j 是向量场

$$a \longmapsto (v_{j1}(a), \cdots, v_{jm}(a)).$$

对 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 充分接近于 0 以及 $U_0 \Subset U$, 考虑局部单参数群

$$\gamma_{t,\alpha}: \frac{\partial \gamma_{t,\alpha}}{\partial t}(a) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v^j(\gamma_{t,\alpha}(a)),$$

$$\gamma_{0,\alpha}(a) = a, \quad \forall a \in U_0,$$

则存在一个 C^∞ 函数 $\Gamma: W \times U_0 \to U$ (W 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 0 的一个适当的邻域)使得

$$\Gamma(t\alpha, a) = \gamma_{t,\alpha}(a).$$

事实上,如果 $t\alpha = s\beta$, 则函数 $\tau \longmapsto \gamma_{\tau t,\alpha}$ 和 $\tau \longmapsto \gamma_{\tau s,\beta}$ 都满足方程

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^{m} (t\alpha_j) v^j(\gamma), \quad \gamma(0) = a,$$

所以它们恒等.

现在考虑映照

$$f: \alpha \longmapsto \Gamma(\alpha, 0),$$

对所有小的 α, 我们有

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(0) = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t\alpha, 0)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v^j(0).$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha^j}(0) = v^j(0).$$

因而在 $\mathbf{R}^m$ 中存在 0 的邻域 $U_2 \Subset U_0$ 和邻域 $W_0 \Subset W$ 使得 f 是 W_0 到 U_2 上的一个解析同构．如上面那样，存在一个解析映照

$$G: U_3 \times \Omega_0 \to \Omega,$$

使得

$$\frac{\partial G(ta, x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} a_j X^j(G(ta, x)), \quad G(0, x) = x, \quad x \in \Omega_0$$

这里 $U_3 \Subset U_2$ 是 0 点的一个适当的邻域．

象上面那样令 $F(a, x) = g_{a_1}, x^1 \circ \cdots \circ g_{a_m} x^m$，则我们断言，对 $\mathbf{R}^m$ 中的 α, b 充分接近于 0，我们有

(*) $\qquad G(\alpha, F(b, x)) = F(c, x), \quad c = \Gamma(\alpha, b).$

事实上，如果 $G(t) = G(t\alpha, F(b, x))$, $F(t) = F(\Gamma(t\alpha, b), x)$，则我们有

(i) $$G(0) = F(b, x), \quad \frac{dG}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X^j(G).$$

另一方面，

(ii) $\qquad F(0) = F(\Gamma(0, b), x) = F(b, x)$，同时有

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial a_j}(\Gamma) \frac{d\Gamma_j(t\alpha, b)}{dt}, \quad \Gamma = (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial a_j}(\Gamma) \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_{kj}(\Gamma(t\alpha, b)) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{m} \alpha_k v_{kj}(\Gamma(t\alpha, b)) u_{ji}(\Gamma(t\alpha, b)) X^i(F(t)) \text{ [引理 d]} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X^k(F(t)), \quad \text{因为 } u(a) = v(a)^{-1}.\end{aligned}$$

方程(*)得自常微分方程解的唯一性．

如果我们在(*)中令 $b = 0$，则得到

$$G(\alpha, x) = F(a, x), \qquad a = \Gamma(\alpha, 0) = f(\alpha).$$

因此，如果 α, β 都充分接近于 0，则我们有

$$G(\alpha, G(\beta, x)) = G(\alpha, F(b, x)), \qquad b = f(\beta),$$

$$= F(c, x), \qquad c = \Gamma(\alpha, b) = \Gamma(\alpha, f(\beta)),$$
$$= G(\gamma, x), \qquad \gamma = \gamma(\alpha, \beta) = f^{-1}(\Gamma(\alpha, f(\beta))).$$

[注意，如果 α，β 接近于 0，则 $\gamma(\alpha, \beta) \in U_2$]. 同时，由于 $\frac{\partial \Gamma(0, 0)}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial \Gamma(0, 0)}{\partial \alpha_m}$ 是 $\mathbf{R}$-无关的，因此对充分小的 α, β，$\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_1}(\alpha, \beta), \cdots, \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_m}(\alpha, \beta)$ 也是 $\mathbf{R}$-无关的. 因此，对固定的 β，映照 $\alpha \longmapsto \gamma(\alpha, \beta)$ 是 0 的一个邻域到 $\gamma(0, \beta) = \beta$ 的一个邻域上的同构. 同样，$\Gamma(0, \beta) = \beta$，所以 $\frac{\partial \Gamma}{\partial \beta_1}, \cdots, \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta_m}$ 对充分小的 α, β 也是 $\mathbf{R}$-无关的，而且对固定的 α，映照 $\beta \longmapsto \gamma(\alpha, \beta)$ 是 0 的一个邻域到 $\gamma(\alpha, 0) = \alpha$ 的一个邻域上的同构. 除了定理 1 中 (i) 的唯一性外，这就证明了所有其余的论断. 而唯一性是下述引理的一个推论.

引理 e 设 $X^1, \cdots X^m$ 是在连通开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^p$ 上的线性无关的实解析向量场. 令 $\Omega_0 \Subset \Omega$，$I = \{t \in \mathbf{R} \mid |t| < \rho\}$，$\rho$ 充分小，则存在唯一的一个解析映照 $F: \Omega_0 \times U \to \Omega$ (U 是 $\mathbf{R}^m$ 中 0 点的一个适当的邻域)使得

$$(**)\quad \frac{\partial F(x, ta)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} a_j x^j(F(x, ta)), \quad a = (a_1, \cdots, a_m),$$
$$F(x, 0) = x.$$

而且如果 U 充分小，则映照

$$a \longmapsto F_a, \quad F_a(x) = F(x, a), \quad x \in \Omega_0$$

是单的.

引理 e 的证明 设 $f: \Omega_0 \times U \times I \to \Omega$ 是一个解析映照，使得

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, a, t) = \sum_{j=1}^{m} a_j X^j(f), \quad f(x, a, 0) = x.$$

如果 $ta = sb$，则我们有 $f(x, a, t) = f(x, b, s)$ (因映照 $\tau \to f(x, a, t\tau)$ 和 $\tau \longmapsto f(x, b, s\tau)$ 都是微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} ta_j X^j(f), \quad f(0) = x$$

的解),所以存在一个解析映照 $F: \Omega_0 \times U \to \Omega$ 满足(**). 而且

$$\left.\frac{\partial F(ta, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial F}{\partial a_j}(0, x) = \sum_{j=1}^{m} a_j X^j(x), \quad \forall\, a \in U.$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial a_j}(0, x) = X^j(x).$$

现在我们断言存在有限多个点 $x_1, \cdots, x_N \in \Omega_0$ 和映照 $\Phi: U \to \mathbf{R}^{mN}$

$$(a_1, \cdots, a_m) \to (F(a, x_1), \cdots, F(a, X_N))$$

使得微分映照

$$d\Phi_0: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{mN}$$

是单的. 由于 $\frac{\partial F}{\partial a_j}(0, x) = X^j(x)$, 只要找到 $x_1, \cdots, X_N \in \Omega_0$, 使得

$$\sum_{j=1}^{m} a_j X^j(x_p) = 0, \quad p = 1, \cdots, N \Rightarrow a_j = 0, \; j = 1, \cdots, m,$$

就行了.

为了做到这一点,令 V 是由 $X^1, \cdots, X^m$ 生成的 $\mathbf{R}$ 向量空间, 令 $x_1 \in \Omega_0$ 使得 $X^1(x_1) \neq 0$ (因在 Ω 上 $X^1 \not\equiv 0$, 所以在 Ω_0 上也 $\not\equiv 0$). 设 $V_1 = \left\{X = \sum_{j=1}^{m} a_j X^j \,|\, X(x_1) = 0\right\}$, 则 $\dim V_1 < \dim V$*) $= m$. 如果 $V_1 = \{0\}$, 则定理得证. 如果 $V_1 \neq \{0\}$, 令 $x_2 \in \Omega_0$ 而且对某个 $Y \in V_1$, 则有 $Y(x_2) \neq 0$. 令 $V_2 = \{X \in V_1 | X(x_2) = 0\}$, 则 $\dim V_2 < \dim V_1 \leqslant m - 1$, 按此法继续进行,我们找到 $x_1, \cdots, x_N \in \Omega_0$, $N \leqslant m$, 使得

$$\{X \in V \,|\, X(x_1) = \cdots = X(x_N) = 0\}$$

---

*) $\dim V$ 表示 V 的维数. ——译者注

的维数是 0. 因此，如果 $\sum_{j=1}^{m} a_j x^j(x_p) = 0$，$p = 1, \cdots, N$ 则有 $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

由隐函数定理可知，Φ 在 0 的一个充分小的邻域上是单的. 引理 e 得证.

Cartan 定理

设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$G = \mathrm{Aut}(D)$ 是 D 的全纯自同构群. 当我们提到 D 上的向量场时，我们把 $\mathbf{C}^n$ 看作 $\mathbf{R}^{2n}$. 设 $X: D \to \mathbf{C}^n$ 是一个全纯映照. 这能理解为 D 上的一个向量场. 如果 $X = (X_1, \cdots, X_n)$，则 X 在 C^∞ 函数 φ 上的作用由下式给出

$$X(\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{n} X_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

我们称 X 是关于 G 的向量场，如果下述事实成立：设 $t \longmapsto g_t$ 是 X 在 $\Omega_0 \Subset D$ 上的局部单参数群，则对充分小的 t，g_t 是 G 的一个元素在 Ω_0 上的限制.

由解析开拓原理得出，这与 Ω_0 的选法无关.

命题 2 设 $GL(n, \mathbf{C})$ 表示 $n \times n$ 的可逆复矩阵组成的群，则 G 同胚于 $D \times GL(n, \mathbf{C})$ 的一个闭子集.

证 设 $x_0 \in D$，令 $K = \{\sigma \in G \mid \sigma(x_0) = x_0\}$，由第 5 章命题 6 可知 K 是紧致的. 对 $\sigma \in G$，令 $J(\sigma)$ 表示矩阵 $\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial z_j}(x_0)\right)$，$\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. 显然，$J(\sigma) \in GL(n, \mathbf{C})$.

考虑由

$$\varphi(\sigma) = (\sigma(x_0), J(\sigma))$$

所给出的映照

$$\varphi: G \to D \times GL(n, \mathbf{C}).$$

我们断言 φ 是单的和正常的. 事实上，映照 $\sigma \to \sigma(x_0)$ 是 G 到 D 内的一个正常映照(这是由于第 5 章的命题 6). 因而 φ 亦然. 为了证明 φ 是单的，设 $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$，则 $\tau^{-1} \circ \sigma \in K$. 而且

$$J(\tau^{-1}\circ\sigma)=\left(\frac{\partial\tau_i^{-1}}{\partial z_j}(\sigma(x_0))\right)\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial z_j}(x_0)\right)$$

$$=J(\tau)^{-1}\cdot J(\sigma)\ (\text{因为}\ \sigma(x_0)=\tau(x_0))$$

$$=\mathrm{id.}\ (\text{因由假定,有}\ J(\sigma)=J(\tau)).$$

因此,由第 5 章命题 1 得 $\tau^{-1}\circ\sigma=\mathrm{id.}$,所以 φ 是单的.

由于 φ 是单的和正常的,所以 φ 是到 $D\times GL(n,\mathbf{C})$ 的一个闭子集上的同胚.

命题 3 设 U_0 是 D 的一个非空开子集,则对任何 $\Omega\Subset D$ 以及 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,使得下述事实成立.

如果 $\sigma,\tau\in G$,对 $x\in U_0$ 有 $|\sigma(x)-\tau(x)|<\delta$,则我们有 $|\sigma(x)-\tau(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in\Omega$ 成立.

证 这可立即得自 Vitali 定理(第 1 章命题7).

现在令 $X^1,\cdots,X^m$ 是 D 到 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯映照,V 是由 X^i 张成的 C-向量空间. 设 V 是向量场的 Lie 代数. [注意,若 C 看作 $\mathbf{R}^2$,则上述意思简单说来就是

$$[X^i,X^j]=(Z_1,\cdots,Z_n)$$

是 X^k 的一个复线性组合;这里

$$Z_s=\sum_{r=1}^{n}\left(X_r^i\frac{\partial x_s^j}{\partial z_r}-X_r^j\frac{\partial X_s^i}{\partial z_r}\right),\quad s=1,\cdots,n]$$

设 $\Omega_0\Subset D$,$g:\Omega_0\times U\to D$ 是 V 的一个局部 Lie 群,U 是 V 中点 0 的一个适当的邻域. 假定对任意 $u\in U$,映照

$$g_u:\Omega_0\to D:g_u(x)=g(x,u)$$

是元素 $f_u\in G$ 在 Ω_0 上的限制. 我们定义一个映照

$$f:D\times U\to D:f(x,u)=f_u(x).$$

命题 4 映照 f 是实解析的.

证 设 $U_0\Subset D$,$\Omega_1\Subset\Omega_0\Subset D$,则 $\bigcup\limits_{u\in U_0}g_u(\Omega_1)=g(\Omega_1\times U_0)\Subset D$. 设 Ω 是一个连通开集而且

$$g(\Omega_1\times U_0)\Subset\Omega\Subset D.$$

令 W 是 V 中 0 点的一个充分小的邻域,而

$$h: \Omega \times W \to D$$

是由 V 确定的在 Ω 上的局部 Lie 群. 对 $u \in W$, $v \in U_0$, 用定理 1 中的记号,我们在 Ω_1 上有

$$g_v \circ h_u = g_{w(v, u)}$$

(因为 $h|\Omega_0 \times W = g|\Omega_0 \times W$). 因此, 由解析开拓原理, 在 Ω 上我们有

$$f_v \circ h_u = f_{w(v, u)}.$$

现在,映照 $u \to w(v, u)$ 是 0 的一个邻域 N_0 到 v 的一个邻域 N 上的解析同构. 令 φ 是其逆,对 $x \in \Omega$, $w \in N$ 我们有

$$f_w(x) = f_v \circ h_{\varphi(w)}(x).$$

因此;

$$f(x, w) = f_v(h(x, \varphi(w))), \quad w \in N, \quad x \in \Omega.$$

由于 h 在 $\Omega \times W$ 上解析, f_v 在 D 上解析, 所以 f 在 $\Omega \times N$ 上解析. 由于 U_0 是 U 的任意相对紧致子集, Ω 是任意相对紧致连通集而且 $g(\Omega_1 \times U_0) \Subset \Omega$, 所以 f 在 $D \times U$ 上解析.

系 设 X 是关于 G 的一个向量场,则存在一个解析映照

$$g: D \times \mathbf{R} \to D$$

使得

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = X(g(x, t)), \quad g(x, 0) = x,$$

而且对任意 $t \in \mathbf{R}$, 映照 $x \longmapsto g(x, t)$ 属于 G.

证 设 $\Omega_0 \Subset D$, $\rho > 0$ 充分小, 令 $I = \{t \in \mathbf{R} \mid |t| < \rho\}$, 则存在一个解析映照

$$h: \Omega_0 \times I \to D$$

使得

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = X(h(x, t)), \quad h(x, 0) = x, \quad x \in \Omega_0, \quad t \in I,$$

而且映照 $h_t: x \to h(x, t)$ 是元素 $f_t \in G$ 在 Ω_0 上的限制. 由命题 4, 由 $f(x, t) = f_t(x)$ 所定义的映照

$$f: D \times I \to D:$$

是解析的．我们定义 g 如下：设 $t_0\in\mathbf{R}$，而 $p>0$ 是一个整数使得 $s_0=t_0/p\in I$．我们令

$$g(x,t_0)=\underbrace{f_{s_0}\cdots f_{s_0}}_{p\text{次}}(x).$$

由命题 1 所述的局部单参数群的性质，g 不依赖于 p 的选择．由解析开拓原理，这个 g 满足我们所需要的微分方程．

这个映照 g 称为关于 X 的单参数群．

伴随于 $\mathrm{Aut}(D)$ 的向量场的存在性

定理 2 设 $\{\sigma_\nu\}$ 是 $G=\mathrm{Aut}(D)$ 的元素的序列，D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界域．设 $\{\sigma_\nu\}$ 收敛到 G 的单位元素，同时存在整数序列 $\{m_\nu\}$，当 $\nu\to\infty$ 时，$m_\nu\to\infty$，而且具有下述性质：

D 到 $\mathbf{C}^n$ 中的映照 $X_\nu(x)=m_\nu(\sigma_\nu(x)-x)$ 所组成的序列 $\{X_\nu\}$ 在 D 的紧致子集上一致收敛到映照 $X: D\to\mathbf{C}^n$，则 X 是关于 G 的一个向量场．

证 设 $\Omega_0\Subset D$，令 $\rho>0$ 如此之小，使得相应于 X 的局部单参数群

$$g:\Omega_0\times I\to D$$

在 $\Omega_0\times I$ 上有定义．令 $0<t_0<\rho$，q_ν 是 $\leqslant m_\nu t_0$ 的最大整数，则 $q_\nu\to\infty$，而且 $0\leqslant m_\nu t_0-q_\nu<1$．我们将证明，存在一个非空开集 $B\subset\Omega_0$ 使得如果 t_0 充分小，则 $\sigma_\nu^{q_\nu}$ 在 B 上一致收敛于映照 $g_{t_0}: x\longmapsto g(x,t_0)$．由 Vitali 定理(第 1 章命题 7)和第 5 章定理 4，我们有 $\sigma_\nu^{q_\nu}$ 收敛于 $\sigma\in G$，由解析开拓原理，还满足 $\sigma|\Omega_0=g_{t_0}$．

我们有

$$\left.\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=X(g(x,0))=X(x),\quad x\in\Omega_0.$$

如果 K 是 Ω_0 的一个紧致子集而且有非空的内部，则表明

(1) $g(x,t)-x=g(x,t)-g(x,0)=t\{X(x)+\varepsilon_1(x,t)\}$，

这里当 $t\to 0$ 时，$\varepsilon_1(x,t)\to 0$ 对 $x\in K$ 是一致的．而且，

$$\sigma_\nu(x) - x = \frac{1}{m_\nu} X_\nu(x) = \frac{t_0}{q_\nu} X'_\nu(x), \quad X'_\nu = \frac{q_\nu}{t_0 m_\nu} X_\nu.$$

现在当 $\nu \to \infty$ 时，有 $X'_\nu \to X$（因为 $0 \leqslant m_\nu t_0 - q_\nu < 1$）。因而

$$(1') \qquad \sigma_\nu(x) - x = \frac{t_0}{q_\nu}\{X(x) + \varepsilon_\nu(x)\},$$

这里当 $\nu \to \infty$ 时，$\varepsilon_\nu(x) \to 0$ 对 $x \in K$ 一致成立.
立即有

$$(2) \qquad |g(x, t_0/q_\nu) - \sigma_\nu(x)| < \delta_\nu/q_\nu, \quad x \in K,$$

这里，当 $\nu \to \infty$ 时，$\delta_\nu \to 0$.

设 $M > 0$ 选得使 $\|X\|_{\Omega_0} < M$，令 B 是以 $x_0 \in K$ 为心 r 为半径的球，$B \subset K$. 我们假定以 B 的任一点为心，r 为半径的球都包含于 K. 我们设 $t_0 < rM$.

我们证明，有下述事实成立：

如果 ν 充分大，$x \in B$，则

$$g(x, pt_0/q_\nu) \in K, \quad \sigma_\nu^p(x) \in K$$

对 $p = 1, \cdots, q_\nu$ 成立.

为了证明这点，令 f 表示两个映照 $x \longmapsto \sigma_\nu(x)$ 和 $x \longmapsto g(x, t_0/q_\nu)$ 中的任意一个，则由(1)及(1')，如果 ν 充分大，则对 $x \in K$，我们有

$$(3) \qquad |f(x) - x| < t_0 M/q_\nu < r/q_\nu.$$

因而，对 $x \in B$，有 $f(x) \in K \subset \Omega_0$. 因此 $f_2(x) = f(f(x))$ 是有定义的，由(3)，在点 $f(x)$，我们有

$$|f_2(x) - f(x)| < r/q_\nu,$$

所以

$$|f_2(x) - x| < 2r/q_\nu \leqslant r, \quad (\text{如果 } q_\nu \geqslant 2),$$

因而如果 $q_\nu \geqslant 2$，则 $f_2(x) \in K$，同时我们在不等式(3)中继续上面那种代换. 如果我们令 $f_1(x) = f(x)$，当 $f_{p-1}(x) \in K$ 时令 $f_p(x) = f(f_{p-1}(x))$，则这给我们下述结果：

对于 $1 \leqslant p \leqslant q_\nu$ 和 $x \in B$，则 $f_p(x)$ 是确定的，而且

$$|f_p(x) - x| < pr/q_\nu \leqslant r.$$

特别，$f_p(x) \in K$。

设 $x \in B$，$x_p = \sigma^p(x)$ 以及 $y_p = g(x, pt_0/q_\nu)$，$p = 1, \cdots, q_\nu$。由(1)，对 $y, y' \in K$ 以及 t 充分小，我们有

$$|g(y, t) - g(y', t)| \leqslant |y - y'|(1 + M|t|).$$

因而对充分大的 ν 以及 $p < q$，我们有

$$|g(x_p, t_0/q_\nu) - g(y_p, t_0/q_\nu)| \leqslant |x_p - y_p|(1 + Mt_0/q_\nu).$$

由(2)，还有

$$|g(x_p, t_0/q_\nu) - \sigma_\nu(x_p)| < \delta/q_\nu.$$

由于 $\sigma_\nu(x_p) = x_{p+1}$，$g(y_p, t_0/q_\nu) = y_{p+1}$，我们得到

$$|x_{p+1} - y_{p+1}| < \frac{\delta_\nu}{q_\nu} + |x_p - y_p|(1 + Mt_0/q_\nu),\ 1 \leqslant p \leqslant q_\nu - 1.$$

由迭代法，得到

$$|y_{q_\nu} - x_{q_\nu}| < (\delta_\nu + |x_1 - y_1|)(1 + Mt_0/q_\nu)^{q_\nu} < 2\delta_\nu e^{Mt_0},$$

(因为(2))．换言之，有

$$|g(x, t_0) - \sigma_\nu^{q_\nu}(x)| < 2\delta_\nu e^{Mt_0},\ \nu \text{ 充分大},\ x \in B.$$

因此在 B 上一致地有 $\sigma_\nu^{q_\nu} \to g_{t_0}$．正如我们已经见过的，这点已经足够了．

系　如果 X, Y 都是关于 G 的向量场，a, b 是实的，则

$$aX + bY \text{ 和 } [X, Y]$$

都是关于 G 的向量场．

证　设 $g, h: D \times \mathbf{R} \to D$ 分别是关于 X，Y 的单参数群（命题 4 的推论）．

$$aX(x) + bY(x) = \lim_{k\to\infty} k\{g(h(x, b/k), a/k) - x\},$$

对 D 中任何紧致子集中的 x 是一致的．同样方法，如果我们用 g_t，h_t 分别表示映照 $x \to g(x, t)$，$y \to h(x, t)$，令

$$\sigma_t = g_t \circ h_t \circ g_{-t} \circ h_{-t},$$

则 $\lim\limits_{t\to 0} t^{-2}\{\sigma_t(x) - x\} = [X, Y](x)$．现在我们就能应用定理 2 而得到推论．

命题 5　关于 G 的向量场的(实)向量空间，其维数是有限的，

而且 $\leqslant 2n(n+1)$.

证 设 $X^1, \cdots, X^m$ 是关于 G 的向量场，而且线性无关. 由 §1 中的引理 e，存在一个解析映照

$$F: \Omega_0 \times U \to D$$

($\Omega_0 \Subset D$, U 是 $\mathbf{R}^m$ 中 0 的一个适当的邻域)，使得

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, ta) = \sum_{j=1}^{m} a_j X^j(F(x, ta)), \quad F(x,0) = x.$$

而且如果 U 充分小，则映照

$$a \longmapsto F_a, \qquad F_a(x) = F(x, a)$$

是单的.

现在，对任何 $a \in \mathbf{R}^m$，$\sum_{j=1}^{m} a_j X^j$ 是关于 G 的一个向量场(上面的系)；而且 $t \longmapsto F_{ta}$ 是关于 $\sum_{j=1}^{m} a_j X^j$ 的局部单参数群. 因而，如果 t 充分小，则映照 $x \longmapsto F(x, ta)$ 是元素 $\tau_t \in G$ 在 Ω_0 上的限制. 如果 $p > 0$ 充分大，则 $\sigma_a = (\tau_{1/p})^p \in G$，而且 $\sigma_a|\Omega_0 = F_a$. 这给我们一个单映照 σ: $U \to G$, $a \longmapsto \sigma_a$. 而且，由于 $\sigma_a|\Omega_0 = F_a$，由命题 3 可知 σ 是连续的. 由命题 2，G 同胚于 $D \times GL(n, \mathbf{C})$ 的一个闭子集，它是 $\mathbf{R}^{2n(n+1)}$ 中的一个开集. 由维数理论的经典结果得到 $m \leqslant 2n(n+1)$. [例如，见 Hurewicz-Wallman, Dimension Theory, Princeton University Press.]

注 假如我们检验一下由 $\phi(\sigma) = \sigma(x_0)$; x_0 是 D 的一个给定的点，所给出的映照 $\phi: G \to D$，易见 $\phi^{-1}(x)$ 是 $GL(n, \mathbf{C})$ 的一个紧致(Lie)子群的傍系，因此其实维数 $\leqslant n^2$. 这点能用以证明关于 G 的向量场的空间的维数是 $\leqslant n(n+2)$. 这是最好的估计了；当 D 是单位球 $D = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$ 时，维数 $= n(n+2)$. 实际上，仅对全纯同构于球的域才达到这个界限. 见 Kaup[18]. 事实上 Kaup 的结果要较这里的结果精确得多.

设 $D_0 \Subset D_1 \Subset D$, D_0 和 D_1 是开集，而且对 $\sigma \in G$，定义

$$\mu(\sigma) = \sup_{x \in D_1} |\sigma(x) - x|.$$

令 $0<\alpha<1<\beta$.

命题6 存在 $\rho>0$ 使得下述事实成立：如果 $\sigma\in G$ 和 $q\geqslant 1$ 使得对 $p=1,\cdots,q-1$ 有 $\mu(\sigma^p)<\rho$，则对 $x\in D_0$ 我们有*)

$$\alpha q|\sigma(x)-x|\leqslant|\sigma^q(x)-x|\leqslant\beta q|\sigma(x)-x|.$$

证 令 $D_0\Subset D_0'\Subset \Omega\Subset D_1$. 我们证明，存在 $\varepsilon_0>0$ 和一个常数 $C>0$ 使得对任何全纯映照 $f: D_1\to \mathbf{C}^n$，如果有性质

$$\mu(f)=\sup_{x\in D_1}|f(x)-x|<\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0,$$

则对 $x, y\in D_0'$，我们有

$$(1-C\varepsilon)|x-y|\leqslant|f(x)-f(y)|\leqslant(1+C\varepsilon)|x-y|.$$

事实上，令 $g(x)=f(x)-x$. 由 Cauchy 不等式和中值定理，存在 $C>0$ 使得

$$|g(x)-g(y)|\leqslant C\varepsilon|x-y|,\quad x,y\in D_0'.$$

显然有

$$|x-y|-|g(x)-g(y)|\leqslant|f(x)-f(y)|$$
$$\leqslant|x-y|+|g(x)-g(y)|.$$

由此即可直接得到上面的断言.

如果 $\mu(\sigma^p)<\rho$, $p=1,\cdots,q-1$，又如果

$$f(x)=\frac{1}{q}\{x+\sigma(x)+\cdots+\sigma^{q-1}(x)\},$$

则 $\mu(f)<\rho$. 我们选取 ρ 使得 $\sigma_0(D_0)\subset D_0'$，并选取 $\alpha<1-C\rho$, $\beta>1+C\rho$. 如果我们应用上面的不等式于 $x,y=\sigma(x)$ 这样的一对点，则命题6立即得证.

Cartan 定理的证明

我们现在进行 Cartan 的证明中的第二个重要步骤.

定理3 如果 $\{\sigma_\nu\}$ 是 G 中元素的一个序列. $\sigma_\nu\not\equiv \mathrm{id}$，同时 $\mu(\sigma_\nu)\to 0$，则存在一个整数序列 $q_\nu\to\infty$，使得 $q_\nu(\sigma_\nu(x)-x)$ 有一个子序列在 D 的紧致子集上一致收敛于一个映照 $X: D\to\mathbf{C}^n$，$X\not\equiv 0$

---

*) 不等式中 α，β 是二个待定常数，这在证明中给以确定. ——译者注

证 令 $0<\alpha<1<\beta$，Ω 是 D 的一个任意开子集，$\Omega \Subset D$. 由命题 3 和 6，存在 $\rho>0$ 使得下述事实成立：如果 $\sigma \in G, N>0$ 以及 $\mu(\sigma^p)<\rho, p=1,\cdots,N$，则

$$\alpha p|\sigma(x)-x| \leqslant |\sigma^p(x)-x| \leqslant \beta p|\sigma(x)-x|,$$
$$p=1,\cdots,N+1,\ x\in\Omega.$$

设 ρ_Ω 是具有这种性质的最大的 ρ. 我们证明如果 $\sigma \neq \mathrm{id.}$，则存在 $N>0$ 使得 $\mu(\sigma^N) \geqslant \rho_\Omega$. 事实上，如果 $\mu(\sigma^N)<\rho_\Omega$ 对所有 N 成立，则我们有

$$\alpha N|\sigma(x)-x| \leqslant |\sigma^N(x)-x|, \quad x\in\Omega.$$

所以

$$|\sigma(x)-x| \leqslant \frac{1}{\alpha N}|\sigma^N(x)-x|.$$

由于 σ^N 是 D 到其自己的一个映照，所以对 N 是一致有界的. 这表明对所有 $x\in\Omega$，有 $\sigma(x)=x$，所以 $\sigma=\mathrm{id.}$，矛盾. 特别，如果 G 不仅是只含有一个恒等变换，则 $\rho_\Omega<\infty$.

对 $\sigma\in G-\{e\}$，令 $q(\sigma,\Omega)$ 是整数 N 使得 $\mu(\sigma^p)<\rho_\Omega, p=1,\cdots,N-1$，而 $\mu(\sigma^N)\geqslant\rho_\Omega$. 我们证明，如果 Ω,Ω' 都是 D 的相对紧致的开子集，则存在 $c=c(\Omega,\Omega')>0$ 使得下述事实成立：

对任何 $\sigma\in G-\{e\}$，我们有

$$c^{-1}q(\sigma,\Omega)\leqslant q(\sigma,\Omega')\leqslant cq(\sigma,\Omega).$$

只要对 $\Omega\subset\Omega'$ 证明这点就够了. 此时 $\rho_{\Omega'}\leqslant\rho_\Omega$，因此 $q(\sigma,\Omega')\leqslant q(\sigma,\Omega)$（由 $q(\sigma,\Omega)$ 的定义）. 如果我们的证明不成立，就存在一个序列 $\{\tau_\nu\}\subset G-\{e\}$ 使得如果我们令 $q_\nu=q(\tau_\nu,\Omega)$，$q'_\nu=q(\tau_\nu,\Omega')$，则当 $\nu\to\infty$ 时，有 $q_\nu/q'_\nu\to\infty$. 我们可设 $\tau_\nu^{q'_\nu}$（事实上是对 $\{\tau_\nu\}$ 的一个子序列如此）在紧致集上一致收敛于映照 $f: D\to\mathbb{C}^n$. 由于 $\mu(\tau_\nu^{q'_\nu})\geqslant\rho_{\Omega'}$，我们有 $\mu(f)\geqslant\rho_{\Omega'}$，因此 $f\neq\mathrm{id.}$，另一方面，对 $x\in\Omega$，我们有

$$|\tau_\nu^{q'_\nu}(x)-x|\leqslant\beta q'_\nu|\tau_\nu(x)-x|\leqslant(\beta q'_\nu/q_\nu\alpha)\cdot\alpha q_\nu|\tau_\nu(x)-x|$$

$$\leqslant (\beta q'_\nu)/(\alpha q_\nu) \cdot |\tau_\nu^{q_\nu}(x) - x| \leqslant \text{const} \cdot q'_\nu / q_\nu.$$

由于 $\tau_\nu^{q_\nu}$ 是D到其自己的一个映照，所以是有界的． 由假定 $q'_\nu/q_\nu \to 0$，这表明 $f = \text{id.}$，证毕．

现在我们选取一个固定的域 $D_0 \Subset D$，同时对 $\sigma \in G - \{e\}$，令 $q(\sigma) = q(\sigma, D_0)$．如果 $\sigma_\nu \in G - \{e\}$，$\mu(\sigma_\nu) \to 0$，令 $q_\nu = q(\sigma_\nu)$．由于 $\mu(\sigma_\nu) \to 0$ 表明在G中 $\sigma_\nu \to e$（命题 3），则我们有 $q_\nu \to \infty$．而且

$$q_\nu |\sigma_\nu(x) - x| \leqslant \frac{1}{\alpha} |\sigma_\nu^{q_\nu}(x) - x|.$$

另外，$q_\nu(\sigma_\nu(x) - x)$ 在任何 $\Omega \Subset D$ 上是有界的（因为 $q_\nu \leqslant \text{const} \cdot q(\sigma_\nu, \Omega)$，所以

$$q_\nu |\sigma_\nu(x) - x| \leqslant \text{const} \cdot |\sigma_\nu^{q_\nu}(x) - x|, \quad x \in \Omega).$$

因此，存在一个子序列 $\{\nu_p\} \subset \{\nu\}$ 使得

$$q_{\nu_p}(\sigma_{\nu_p}(x) - x)$$

在D的紧致子集上一致收敛于映照 $X: D \to \mathbf{C}^n$．

由于 $\mu(\sigma_{\nu_p}^{q_{\nu_p}}) \geqslant \rho_{D_0}$，我们可以假定（如果必要可取 $\{\nu_p\}$ 的子序列）$\{\sigma_{\nu_p}^{q_{\nu_p}}\}$ 收敛于一个映照 $g: D \to \mathbf{C}^n$ 而且 $\mu(g) \geqslant \rho_{D_0}$．在不等式

$$|\sigma_{\nu_p}^{q_{\nu_p}}(x) - x| \leqslant \beta q_{\nu_p} |\sigma_{\nu_p}(x) - x|, \quad x \in D_0$$

中取极限，我们得到

$$|g(x) - x| \leqslant \beta \cdot |X(x)|, \quad x \in D_0.$$

由于 $\mu(g) \geqslant \rho_{D_0}$，这表明 $X \not\equiv 0$．

这就证明了定理 3．

设V是所有全纯映照 $X: D \to \mathbf{C}^n$ 的集合，这些映照都是伴随于G的向量场，则由命题 5 和定理 2 的系，V是向量场的一个（有限维）的 Lie 代数． 设 $\Omega_0 \Subset D$ 和U是V中 0 的一个适当的邻域．令

$$g: \Omega_0 \times U \to D$$

是关于V的局部 Lie 群．我们已经看到（见命题 5 的证明），对任

何 $u\in U$，存在 $\sigma_u\in G$，使得对 $x\in\Omega_0$ 有

$$\sigma_u(x)=g(x,u).$$

我们由 $\varphi(u)=\sigma_u$ 定义一个映照 $\varphi: U\to G$. 从命题3立即得到φ是连续的.

命题7 $\varphi(U)$ 是G内 e(=恒等变换)的一个邻域.

证 象上面那样，令 $D_0\Subset D_1\subset\Omega_0$，$\mu(\sigma)=\sup\limits_{x\in D_1}|\sigma(x)-x|$. 设$K$是0的一个紧致对称邻域，$K\subset U$. 假定结果不成立，则存在一个序列 $\{\sigma_\nu\}\subset G-\{e\}$，当 $\nu\to\infty$ 时，有 $\sigma_\nu\to e$，$\sigma_\nu\notin\varphi(U)$. 定义

$$\varepsilon_\nu=\inf_{u\in K}\mu(\varphi(a)\cdot\sigma_\nu),$$

由于φ是连续的，K紧致的，所以存在一个 $a_\nu\in K$ 使得

$$\varepsilon_\nu=\mu(\varphi(a_\nu)\cdot\sigma_\nu).$$

特别，$\varepsilon_\nu>0$ (因为若 $\varepsilon_\nu=0$，我们就有

$$\sigma_\nu=\varphi(a_\nu)^{-1}=\varphi(-a_\nu)\in\varphi(U)).$$

而且由于 $\sigma_\nu\to e$，所以

$$\varepsilon_\nu\leqslant\mu(\varphi(0)\cdot\sigma_\nu)=\mu(\sigma_\nu)\to 0.$$

令

$$\tau_\nu=\varphi(a_\nu)\cdot\sigma_\nu.$$

由于 $\mu(\tau_\nu)=\varepsilon_\nu\to 0$，所以由定理3，存在整数的序列 $\{q_\nu\}$，$q_\nu\to\infty$*)使得

$$q_\nu(\tau_\nu(x)-x)$$

有一个子序列，在D的紧致子集上一致收敛于映照 $X: D\to\mathbf{C}^n$，$X\not\equiv 0$. 将$\{\tau_\nu\}$换以相应的子序列，我们假定 $q_\nu(\tau_\nu-e)\to X$. 由定理2得X是关于G的一个向量场.

令

$$A=\sup_{x\in D_1}|X(x)|,$$

则当 $\nu\to\infty$ 时，

---

*) 原书此处误为“$q_\nu\longrightarrow 0$”. ——译者注

$$q_\nu \varepsilon_\nu = \sup_{x \in D_1} q_\nu |\tau_\nu(x) - x| \to A > 0.$$

设 U_0 是 V 中 0 的一个邻域，$\bar{U}_0 \subset \mathring{K}$，则

$$\delta = \inf_{a \in K - U_0} \mu(\varphi(a)) > 0,$$

同时由于 $\sigma_\nu \to e$，所以

$$\lim_{\nu \to \infty} \inf_{a \in K - U_0} \mu(\varphi(a)\sigma_\nu) = \delta.$$

由于 $\varepsilon_\nu \to 0$，所以对充分大的 ν，有 $a_\nu \in U_0$.

设 $t \longmapsto h_t$ 是 X 的单参数群(命题 4 的推论)，则对小的 t 有 $h_t \in \varphi(K)$. 考虑

$$\omega_\nu = h_{-1/q_\nu} \circ \tau_\nu,$$

则 $\omega_\nu = h_{-1/q_\nu} \circ \varphi(a_\nu) \circ \sigma_\nu = \varphi(b_\nu) \circ \sigma_\nu$，这里 $b_\nu = w(-1/q_\nu, a_\nu)$ (同定理 1 的符号). 由于对大的 ν 有 $a_\nu \in U_0$，同时 $q_\nu \to \infty$，而且 ν 充分大时，$b_\nu \in K$. 因此对大的 ν 我们有

$$\mu(\omega_\nu) \geqslant \varepsilon_\nu.$$

现在我们证明，如果

$$\phi_\nu(x) = h_{-1/q_\nu}(\tau_\nu(x)) - x,$$

则当 $\nu \to \infty$ 时，$q_\nu \phi_\nu(x) \to 0$ 对 $x \in D_1$ 是一致的. 事实上，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\phi_\nu(x) = \tau_\nu(x) - x - \frac{1}{q_\nu} X(\tau_\nu(x)) + q_\nu^{-2} a_\nu(x),$$

这里对所有 ν 有 $|a_\nu(x)| \leqslant C$ 而且 $x \in D_1$，这给出

$$q_\nu \phi_\nu(x) = q_\nu(\tau_\nu(x) - x) - X(\tau_\nu(x)) + O(q_\nu^{-1}).$$

由于 $q_\nu(\tau_\nu(x) - x) \to X(x)$ 和 $X(\tau_\nu(x)) \to X(x)$ 在 D 的紧致集上是一致的，所以 $q_\nu \phi_\nu(x) \to 0$ 在 D_1 上一致. 由于 $\mu(\omega_\nu) \geqslant \varepsilon_\nu$，这表明当 $\nu \to \infty$ 时，有 $q_\nu \varepsilon_\nu \to 0$. 这与我们早已得到的 $q_\nu \varepsilon_\nu \to A = \sup_{x \in D_1} |X(x)| > 0$ 相矛盾. 这证明了命题 7.

定理 4 (H. Cartan) 群 $G = \mathrm{Aut}(D)$ 具有一个 Lie 群结构使得映照 $G \times D \to D$，$(\sigma, x) \longmapsto \sigma(x)$ 是实解析的.

证 令 U 如命题 7 所设. 如果 K 是 V 中 0 的一个紧致邻域，

$K \subset U$，则 $\varphi|K$*) 是到 G 中 e 的一个邻域 N 上的同胚．设 W_0 是 G 内 e 的一个开邻域使得 $W_0 = W_0^{-1}$, $W_0 \cdot W_0 \subset N$（这里 $W_0^{-1} = \{\sigma \in G | \sigma^{-1} \in W_0\}$，$W_0 \cdot W_0 = \{\tau \cdot \sigma | \tau, \sigma \in W_0\}$）．而且，$U_0 = \varphi^{-1}(W_0)$ 是 V 中 0 的一个邻域．

我们考虑 G 的覆盖 $\{W^\sigma\}_{\sigma \in G}$，这里 $W^\sigma = W_0 \cdot \sigma = \{\tau \cdot \sigma | \tau \in W_0\}$。设 $x_\sigma: W_0 \cdot \sigma \longmapsto U_0$ 是一个同胚 $\tau \cdot \sigma \to \varphi^{-1}(\tau)$．$U_0$ 在有限维向量空间 V 中是开的，也可看作是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个开集，$m = \dim V$。如果 $W^\sigma \cap W^\tau \neq \emptyset$，则坐标变换 $\chi_\tau \circ \chi_\sigma^{-1}$ 为

$$\chi_\tau \circ \chi_\sigma^{-1}(u) = \varphi^{-1}(\varphi(u) \circ \sigma \circ \tau^{-1}).$$

现在 $\sigma \circ \tau^{-1} \in N$，所以，用定理 1 中的记号，若 $\sigma \circ \tau^{-1} = \varphi(v_0)$，我们有

$$\chi_\tau \circ \chi_\sigma^{-1}(u) = w(u, v_0),$$

这是 u 的一个实解析函数．

如果 $f: G \times D \to D$ 是映照 $f(\sigma, x) = \sigma(x)$，则 $(\chi_\sigma^{-1} \times \text{id.}) \cdot f$ 是映照 $(u, x) \to \varphi(u)(\sigma(x))$，由命题 4，它是解析的（固定 σ）．

这就证明了 Cartan 定理．

G 上的 Lie 群结构由它的拓扑群结构唯一确定．这是 E. Cartan 的一般定理的一个系（例如见 Chevalley[12]，128—129）．

上面给出的那些证明与 H. Cartan 的证明[7]十分相近．Cartan 的结果甚至更强（例如它们将上述的唯一性叙述作为付产品给出）．Cartan 所引用的方法被 Bochner-Montgomery[4] 用来证明一个局部紧致群有效的作用在一个微分流形上（有效作用亦就是讲除了中心元素之外，没有其他元素作用在流形上如同恒同），而且群的每个元素的作用是微分同胚，则事实上它就是一个 Lie 群．

Bochner-Montgomery 的这一结果，就其本身而言，在进一步研究复空间上的变换群也是基本的．可见之于 Kaup[18] 与[18]中给出的参考文献．

---

*) 这里的 φ 是定理 3 的证明中所定义的李代数到局部李群的映照．——译者注

最后一个注 在 Cartan 定理中，D是有界的假设是本质的。W. Kaup 给出一个无界域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 的例子，且 Aut(D) 是可递的作用于D上(此即对任何一对点 x、$y \in D$，有一个 $\sigma \in$ Aut(D)，使 $\sigma(x) = y$)，然而却不存在 Lie 群可递的作用在D上. 他也研究了一些不等价于有界域的空间类，而 Cartan 定理对它们依然成立。

参考文献

[1] H. Behnke and P. Thullen. Theorie der Funktionen mehreren komplexen Veranderlichen. Erg. der Math. 3. Springer, Berlin, 1934.

[2] E. Bishop. Holomorphic completion, analytic continuation, and the interpolation of semi-norms. *Annals of Math.* 78 (1963), 468—500.

[3] S. Bochner, A theorem on analytic continuation of functions in several variables. *Annals of Math.* **39** (1938), 14—19.

[4] S. Bochner and D. Montgomery. Locally compact groups of differentiable transformations. *Annals of Math.* **47** (1946), 639—653.

[5] H. Cartan. Les fontions de deux variables complexes et le probleme de la representation analytique. *J. de Math. pures et app.* **10** (1931), 1—114.

[6] H. Cartan, Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: L' itération des transformations interieures d'un domaine borne. *Math. Zeit.* **35** (1932), 760—773.

[7] H. Cartan. Sur les groupes de transformations analytiques. Actualites Sc. et Indus. Hermann, Paris, 1935.

[8] H. Cartan. Sur les fonctions de n variables complexes: Les transformations du produit topologique de deux domaines bornés. *Bull. Soc. math. France* **64** (1936), 37—48.

[9] H. Cartan. Sur une extension d'un théorème de Redó. *Math. Annalen* **125**(1952), 49—50.

[10] H. Cartan. Séminaire E. N. S. 1951/52.

[11] H. Cartan. Séminaire E. N. S. 1953/54.

[12] H. Cartan. Séminaire E. N. S. 1960/61.

[13] H. Cartan and P. Thullen. Zur Theorie der Singularitaten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen: Regularitätsund konvergenzbereiche. *Math. Annalen* **106** (1932), 617—47.

[14] C. Chevalley. Theory of Lie Groups. Princeton Univ Press. 1946.

[15] J. Frenkel, Séminaire sur les theoremes A et B pour les espaces de Stein. Strasbourg 1965.

[16] R. Gunning and H. Rossi. Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, 1965.

[17]. F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen menrerer unabhangiger Veranderlichen insbesondere uber die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veranderlichen fortschreiten. *Math. Annalen* **63** (1906), 1—88.

[18] F. Hartogs. Uber die aus der singularen Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde, *Acta Math.* **32** (1909), 57—79.

[19] E. Heinz. Ein elementarer Beweis des Satzes von Radó-Behnké-Stein-Cartan über analytische Funktionen. *Math. Annalen* **131** (1956), 258—259.

[20] M. Hervé. Several complex variables: Local theory. Oxford Univ Press and Tata Institute of Fundamental Research, 1963.

[21] L. Hörmander. An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, 1966.

[22] W. Kaup. Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen. *Inventiones Math.* **3** (1967), 43—70.

[23] B. Malgrange. Lectures on functions of several complex variables. Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[24] R. Narasimhan. *Introduction to the theory of analytic spaces.* Springer Lecture Notes, no. 25, 1966.

[25] R. Narasimhan. Analysis on real and complex manifolds. North-Holland, 1968.

[26] K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX, Domaines finis sans points critiques interieurs. *Jap. J. of Math.*

[27] F. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie, vol. 2, pt. 1. B. G. Teubner, Leipzig, 1924.

[28] T. Rado Subharmonic functions. Chelsea Pub. Co., 1949.

[29] T. Rado. Uber eine nicht-fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. *Math. Zeit.* **20** (1924), 1—6.

[30] K. Reinhardt. Über Abbildungen durch analytische Funktionen Zweier Veränderlichen. *Math. Annalen* **83** (1921), 211—255.

[31] R. Remmert and K. Stein. Eigentliche holomorphe Abbildungen. *Math. Zeit.* **73** (1960), 159—189.

[32] P. Thullen. Zur Theorie der Singularitaten der Funktionen mehrerer komplexer Veranderlichen: Die Regularitate hullen, *Math. Annalen* **106** (1932), 64—76.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝现代数学译丛　多复变函数
作者＝（美）　Ｒ．纳拉西姆汉
页数＝１４０
ＳＳ号＝１０２３６７９３
出版日期＝